

Familles de cycles algébriques – Schéma de Chow

Bernard Angéniol

Je tiens à remercier Pierre Deligne, Jean-Louis Verdier, Michel Raynaud, Daniel Barlet et Fouad Elzein, pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail, ainsi que Madame Bonnardel qui a effectué la frappe de ce texte.

L'auteur est attaché de recherches au C.N.R.S. et fait partie de l'E.R.A. 589.

Table des matières

Chapitre 0. Introduction	4
Chapitre 1. Formes multilinéaires de Waring	8
1.1. Règles de signes	8
1.2. Tenseurs symétriques	10
1.3. Complexe simplicial strict associé à une trace	11
1.4. Calcul des formes multilinéaires de Waring	11
1.5. La trace universelle	13
1.6. Revêtement canonique de $TS_A^k(B)$	17
1.7. Sommes de traces et traces de traces	19
1.8. Sur les équations de $TS_A^k(B)$	21
Chapitre 2. Classes de cohomologie locale et résidus	25
2.1. Résidus et traces de différentielles	25
2.2. Changement de projection infinitésimal	28
Chapitre 3. Invariance des formes multilinéaires de Waring	29
Chapitre 4. Foncteur de Chow	30
4.1. Classes de Chow	30
Chapitre 5. Représentabilité du foncteur de Chow	31
Chapitre 6. Le cas projectif – le cas réduit	32
6.1. Comparaison avec l'espace des cycles de Barlet	32
6.2. Coordonnées de Chow	32
6.3. Images directes	32
6.4. Un exemple : les courbes de degré 2 de $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$	32
Chapitre 7. Le morphisme du schéma de Hilbert dans le schéma de Chow	33
7.1. Classe fondamentale dans le cas plat	33
7.2. Cas des diviseurs	33
7.3. Remarques	33
Chapitre 8. Intersections	34
8.1. Cup-produits et intersections	34
8.2. Équivalence algébrique. Images réciproques	34
8.3. Intégration de classes de cohomologie	34
Bibliographie	35

Introduction

Le but de ce travail est de munir l'ensemble des cycles compacts d'un schéma donné d'une structure d'espace algébrique. On y parvient ici en caractéristique zéro. | p. 1

Plus précisément, soit K un corps et soit X un schéma lisse sur K purement de dimension $N = n + p$. Soit $\xi^p(X)$ le groupe libre $\mathbb{Z}^{(X^p)}$ ayant pour base l'ensemble des parties fermées irréductibles propres de codimension p dans X , ordonné par l'ordre induit par l'ordre produit $\mathbb{Z}^{X^p}$. On note $C^p(X)$ l'ensemble des éléments positifs de $\xi^p(X)$. Les éléments de $C^p(X)$ sont appelés cycles purement de codimension p sur X . Il s'agit donc de munir $C^p(X)$ d'une structure d'espace algébrique. Pour définir une famille de cycles de X paramétrée par un K -schéma S , le plus naturel est de considérer un cycle de $X \times S$, Z , et d'imposer aux cycles Z_s , s décrivant S , des conditions de régularité.

Une condition de régularité naturelle est la platitude : à un cycle Z , on associe une structure de schéma tenant compte des multiplicités, et on demande alors que le morphisme de Z dans S soit plat. C'est ce qui a conduit à la construction du schéma de Hilbert (espace de Douady). Cette condition est très raisonnable si l'on suppose l'espace de paramètres S lisse, car il suffit par exemple que Z soit de Cohen–Macaulay pour que le morphisme de Z dans S soit plat. Mais, si S n'est pas lisse, même pour les 0-cycles, on perd des familles de cycles tout-à-fait naturelles, comme le montre l'exemple suivant.

Prenons $X = \mathbb{A}_K^2 = \text{Spec}(K[t, u])$, et $S = \text{Spec}(K[x, y, z]/(xy - z^2))$. On a alors une paramétrisation de S par les points de X , $x = t^2$, $y = u^2$, $z = tu$. Cela définit donc un morphisme fini de X dans S . Au-dessus d'un point s du cône S distinct du sommet se trouvent deux points de X de coordonnées (t, u) et $(-t, -u)$, et au-dessus du sommet s_0 de S se trouve l'origine $(0, 0)$ de X . On est donc tenté de dire que la famille de 0-cycles de X paramétrée par S formée au-dessus de $s \neq s_0$ de la somme des points de coordonnées (t, u) et $(-t, -u)$, et au-dessus de s_0 de 2 fois le point de coordonnées $(0, 0)$ est une famille algébrique. | p. 2

Pourtant, le morphisme f de X dans S n'est pas plat. Pour le voir, puisque f est fini et S intègre, il suffit de vérifier que l'entier $\dim_{k(s)}((f_*(\mathcal{O}_X))_s \otimes k(s))$ n'est pas indépendant du point s . Si s est distinct de s_0 , la fibre au-dessus de s est union de deux points simples et l'entier ci-dessus est donc égal à 2, tandis qu'au point s_0 , on obtient $\dim(K[t, u]/(t^2, tu, u^2)) = 3$, d'où le résultat.

Mais, dans cet exemple, les cycles considérés sont des cycles de dimension 0 et de degré 2. Un tel cycle s'écrit donc $P_1 + P_2$ où les P_i sont des points de X (nous supposons pour simplifier que K est algébriquement clos). L'espace de ces cycles est donc l'ensemble des couples (P_1, P_2) pris sans ordre, soit $X \times X / \mathfrak{S}_2$, où $\mathfrak{S}_2$ est le groupe symétrique d'ordre 2, ce que nous noterons $\text{Sym}^2 X$. Pour prouver que la famille considérée est bien algébrique, il faut donc montrer qu'elle correspond à un morphisme de S dans $\text{Sym}^2 X$.

Étudions pour cela les équations de $\text{Sym}^2 X$. Nous allons plonger $\text{Sym}^2 X$ dans $\mathbb{A}_K^5$ par les coordonnées de Newton, i.e. si l'on considère deux copies de X avec les coordonnées (t, u) et (t', u') , on pose $N_1 = t + t'$, $N_2 = u + u'$, $N_{11} = t^2 + t'^2$, $N_{12} = tu + t'u'$, $N_{22} = u^2 + u'^2$. On a alors

LEMME. $\text{Sym}^2 X$ est isomorphe à $\text{Spec}(K[N_1, N_2, N_{11}, N_{12}, N_{22}]/(h))$, où h est égal

$$\text{au déterminant } \begin{vmatrix} 2 & N_1 & N_2 \\ N_1 & N_{11} & N_{12} \\ N_2 & N_{12} & N_{22} \end{vmatrix}.$$

Le morphisme de $\text{Sym}^2 X$ dans $\mathbb{A}_K^5$ est bien un plongement car on est en caractéristique 0, et que les fonctions symétriques de Newton d'ordre au plus 2 engendrent toutes les fonctions symétriques. De plus, si l'équation ci-dessus est vérifiée, il existe t et t' tels que $N_1 = t + t'$, $N_{11} = t^2 + t'^2$, il existe u et u' tels que $N_2 = u + u'$, $N_{22} = u^2 + u'^2$, et on a $N_{12}^2 - [(tu + t'u') + (tu' + t'u)]N_{12} + (tu + t'u')(tu' + t'u) = 0$, d'où $N_{12} = tu + t'u'$ ou $N_{12} = tu' + t'u$, ce qui prouve le lemme (quitte à échanger u et u').

Puisque le morphisme de X dans S est fini, on va lui associer une trace θ de $\mathcal{O}_X$ dans $\mathcal{O}_S$ donnée par la formule :

$\theta(g)(s) = g(P_1) + g(P_2)$, où g est une fonction sur X , s un point de S , et P_1 et P_2 les deux points de X au-dessus de s . On a donc :

$$\theta(t) = t + (-t) = 0, \theta(u) = u + (-u) = 0, \theta(t^2) = t^2 + (-t)^2 = 2t^2 = 2x, \theta(u^2) = u^2 + (-u)^2 = 2u^2 = 2y, \theta(tu) = tu + (-t)(-u) = 2tu = 2z.$$

L'application de S dans $\text{Sym}^2 X$ correspondra donc au morphisme d'anneaux donné par $N_1 \rightarrow \theta(t)$, $N_2 \rightarrow \theta(u)$, $N_{11} \rightarrow \theta(t^2)$, $N_{12} \rightarrow \theta(tu)$, $N_{22} \rightarrow \theta(u^2)$, de

sorte qu'il suffit de vérifier que le déterminant $\begin{vmatrix} 2 & \theta(t) & \theta(u) \\ \theta(t) & \theta(t^2) & \theta(tu) \\ \theta(u) & \theta(tu) & \theta(u^2) \end{vmatrix}$ est égal à 0. Or,

ce déterminant est égal à $8(xy - z^2) = 0$ sur S , d'où le résultat.

Revenons au problème général.

Lorsque $n = 0$, un cycle peut s'écrire $\sum_{i=1}^{\ell} n_i P_i$, où $n_i \in \mathbb{N}$ et où les P_i sont des points fermés de X . Si $\sum_{i=1}^{\ell} n_i \dim_K k(P_i) = k$, un tel cycle peut donc s'identifier au point de $\text{Sym}^k(X)$ composé du point P_1 (n_1 fois), etc..., du point P_{ℓ} (n_{ℓ} fois) ($\text{Sym}^k(X)$ est le quotient du produit X^k par l'action du groupe symétrique $\mathfrak{S}_k$). On a donc immédiatement une structure d'espace algébrique de type fini sur l'espace des cycles de dimension 0 de degré k , donc une structure d'espace algébrique localement de type fini sur $C^N(X)$.

Dans le cas où X est égal à l'espace projectif (ou par extension, une variété projective), les cycles sont repérés par les "coordonnées de Chow". L'idée est de considérer l'intersection d'un cycle de $C^p(X)$ par un plan de dimension $p - 1$. Cette intersection est génériquement vide, et l'ensemble des plans de dimension $p - 1$ qui rencontrent un cycle donné constitue une hypersurface de la grassmannienne; cela permet de repérer le cycle à l'aide des coefficients de l'équation de l'hypersurface (la forme de Cayley), qui sont ce que l'on appelle les coordonnées de Chow. Malheureusement, cette construction est basée sur la vacuité d'intersections de variétés et ne se prête donc pas à une étude satisfaisante des variations infinitésimales de cycles. De plus, elle repose sur des arguments globaux qui la lient au cas projectif et la rendent non intrinsèque.

Si S est un schéma sur K , pour définir une famille de cycles de X paramétrée par S , l'idée fondamentale de Barlet dans [2], a été de poser qu'une famille $(Z_s)_{s \in S}$ de $C^p(X)$ était algébrique si chaque fois que l'on coupait $(Z_s)_{s \in S}$ par un plan de dimension p de manière à ce que l'intersection soit finie pour tout s , on obtenait une famille localement algébrique de dimension zéro (correspondant donc à un morphisme $S \rightarrow \text{Sym}^k X$). Cette formulation locale permet de se délivrer d'hypothèses projectives en posant qu'une famille $(Z_s)_{s \in S}$ est algébrique si pour toute projection locale sur un S -schéma lisse B de dimension relative n , tel que Z soit quasi-fini sur B , le cycle Z correspond à un morphisme $B \rightarrow \text{Sym}_B^k(X \times S)$ (quotient de

p. 3

p. 4

$(X \times S) \times_B (X \times S) \cdots \times_B (X \times S)$ par $\mathfrak{S}_k$). Mais la difficulté est alors le changement de projection : quand peut-on dire que deux morphismes $B \rightarrow \mathrm{Sym}_B^k(X \times S)$ et $B' \rightarrow \mathrm{Sym}_{B'}^k(X \times S)$ correspondent au même cycle ?

Ici encore, on doit s'en tenir au cas où S est réduit, ce qui permet de répondre à la question précédente en ne tenant compte que des supports et des multiplicités. Notons par ailleurs qu'un point de $\mathrm{Sym}^k(X)$ est repéré par les valeurs prises en ce point par les fonctions symétriques ; on ne peut le considérer comme un k -uplet de points de X à valeurs dans K , pris sans ordre, que si K est algébriquement clos.

La démarche que nous suivons ici est de reprendre les idées de Barlet en abordant, d'après une suggestion de Deligne, le problème du changement de projection du point de vue de la théorie de la dualité et des classes fondamentales développé dans [9] et [5]. En termes clairs, observant que les morphismes $B \rightarrow \mathrm{Sym}_B^k(X \times S)$ correspondent biunivoquement à certaines traces $\theta : \mathcal{O}_{X \times S} \rightarrow \mathcal{O}_B$, et qu'une classe c dans $H_Z^p(X \times S, \Omega_{X \times S/S}^p)$ induit pour toute projection une trace $\theta_{X \times S} \rightarrow \theta_B$, nous dirons que deux morphismes $B \rightarrow \mathrm{Sym}_B^k(X \times S)$ et $B' \rightarrow \mathrm{Sym}_{B'}^k(X \times S)$ correspondent au même cycle s'ils proviennent d'une même classe. Notons ici que nous avons repéré ici les éléments de $\mathrm{Sym}^k(X)$ à l'aide de traces, c'est-à-dire des fonctions symétriques de Newton ; comme celles-ci n'engendrent toutes les fonctions symétriques qu'en caractéristique zéro, cela nous conduit donc à supposer K de caractéristique zéro. L'existence d'une théorie de la dualité cristalline (à puissances divisées) manque pour tenter de traiter le cas de la caractéristique positive. Ainsi, une famille de cycles compacts de X paramétrée par S sera un couple (Z, c) , où Z est un fermé propre de $X \times S$ purement de codimension p fibre par fibre, et c une classe de $H_Z^p(X \times S, \Omega_{X \times S/S}^p)$, non nulle aux points génériques des composantes irréductibles de Z , et "admissible", c'est-à-dire vérifiant certaines propriétés. Rappelons (cf. 2.1.2, 2.1.4) qu'une classe c correspond à la donnée, pour une projection quelconque sur un schéma B lisse sur S tel que Z soit fini sur B , d'une trace $\theta : \mathcal{O}_{Z_m} \otimes \Omega_{X \times S/S}^\bullet \rightarrow \Omega_{B(S)}^\bullet$, où Z_m est le $m^{\mathrm{ème}}$ voisinage infinitésimal de Z , et m est assez grand.

Appelons famille admissible de classes, soit $\mathfrak{F}$, la donnée, pour tout schéma S et tout $Z \subset X \times S$ fermé propre purement de codimension p dans chaque fibre du morphisme $X \times S \rightarrow S$, d'un ensemble de classes c dans $H_Z^p(X \times S, \Omega_{X \times S/S}^p)$, tel que les propriétés suivantes soient satisfaites :

a) *Conservation de la multiplicité* :

Une classe c de $\mathfrak{F}$ est fermée pour d' (ce qui équivaut à dire que la trace θ commute aux différentielles).

b) *Normalisation* :

Si Z est un schéma S -lisse, irréductible, et si c est une classe de $\mathfrak{F}$ induisant sur Z la multiplicité 1, alors c est la classe fondamentale de Z ([5], [6]).

c) *Spécialisation* :

Pour tout schéma affine U étale sur $X \times S$, et toute projection sur un schéma lisse B , soit $Y_{U,B}$ l'espace des classes de $\varinjlim_Z H_Z^p(U, \Omega_{U/S}^p)$ à support Z de pure codimension p dans chaque fibre au-dessus de S , et tel que le schéma réduit sous-jacent à ce fermé soit fini sur B ; si $k \in \mathbb{N}$, soit E_k le sous-ensemble de $Y_{U,B}$ formé des classes pouvant s'écrire comme somme de k classes fondamentales de S -schémas lisses de degré 1 sur B (ce qui équivaut à dire que la trace θ peut s'écrire comme somme de k -morphismes d'algèbres). La trace correspondant par 2.1.2 et 2.1.4 à une classe c de $\mathfrak{F}$ vérifie les équations naturelles (cf. 1.5.3 pour la signification)

p. 5

p. 6

que vérifient les traces associées aux classes de E_k , c'est-à-dire aux classes fondamentales des revêtements finis étales de B .

d) *Localisation* :

Une classe c appartient à $\mathfrak{F}$ si et seulement si pour tout point z de Z , il existe un voisinage U de z dans $X \times S$ pour la topologie étale, tel que c_U appartienne à l'image réciproque de $\mathfrak{F}_U$ sur U .

Dès lors, si l'on note $\Omega_{U^k/S}^{\bullet\sigma}$ la sous-algèbre de $\Omega_{U \times_B U \times_B \cdots \times_B U/S}^{\bullet}$ formée des différentielles invariantes par l'action de $\mathfrak{S}_k$, on peut poser | p. 7

DÉFINITION. Une classe c de $H_Z^p(X \times S, \Omega_{X \times S/S}^p)$ est une classe de Chow sur U pour une projection $U \rightarrow B$ finie sur Z si elle induit un morphisme $\Omega_{U^k/S}^{\bullet\sigma} \rightarrow \Omega_{B/S}^{\bullet}$ compatible avec la différentielle extérieure et les opérations de contraction sur les espaces tangents successifs (cf. 4.1.2 pour une définition précise).

La classe c est une classe de Chow si elle est une classe de Chow sur tous les ouverts d'un recouvrement de $X \times S$ (pour la topologie étale).

On a alors le :

THÉORÈME. La famille des classes de Chow est une famille de classes admissibles.

Si l'on note $C_X^p(S)$ l'ensemble des familles de cycles compacts paramétrées par S , $S \mapsto C_X^p(S)$ est un foncteur contravariant représentable dans la catégorie des espaces algébriques ; ceci munit donc bien $C^p(X)$ d'une structure d'espace algébrique.

Au **chapitre 1**, on définit les formes multilinéaires de Waring, et on caractérise les traces qui induisent un morphisme d'anneaux sur les tenseurs symétriques : $\Omega_{U^k/S}^{\bullet\sigma} \rightarrow \Omega_{B/S}^{\bullet}$. Cela nous conduit à expliciter les équations de $\text{Sym}^k(C^p)$ pour le plongement par les fonctions symétriques de Newton.

Aux **chapitres 2 et 3**, on explicite l'isomorphisme résidu et on exprime la trace associée à une classe c dans une projection en fonction de la trace associée à cette même classe dans une autre projection ; puis, on exprime en termes de la trace dans une projection, le fait que, pour toute projection, la trace vérifie une famille d'équations. On applique cela au cas des formes multilinéaires de Waring, et on obtient une famille d'équations indépendante de la projection. Puis on montre qu'un nombre fini de ces équations engendre les autres. | p. 8

Au **chapitre 4**, on définit ce qu'est une classe de Chow ; on déduit la définition du foncteur de Chow et on étudie son espace tangent.

Au **chapitre 5**, on montre que le foncteur de Chow est représentable dans la catégorie des espaces algébriques.

Au **chapitre 6**, on montre que l'espace réduit associé à l'espace algébrique de Chow coïncide avec l'espace des cycles de Barlet, donc dans le cas projectif avec les coordonnées de Chow. On donne un théorème d'image directe des cycles qui permet de définir $C^p(X)$ même lorsque X n'est pas lisse. On termine en explicitant les équations locales du schéma des courbes de degré 2 dans $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$.

Au **chapitre 7**, on définit un morphisme du schéma de Hilbert dans le schéma de Chow, et on montre que c'est un isomorphisme dans le cas des diviseurs ($p = 1$). Pour cela, on doit d'abord donner une formule explicitant ce qu'est la trace : $\Omega_{Z/S}^{\bullet} \rightarrow \Omega_{B/S}^{\bullet}$ dans le cas où Z est un schéma fini et plat sur B lisse (l'existence de cette trace avait été démontrée dans [1]).

Enfin, au **chapitre 8**, on définit l'intersection de deux familles algébriques de cycles, et on caractérise l'équivalence algébrique en fonction des composantes connexes de $C^p(X)$.

Formes multilinéaires de Waring

Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille de k points de V , espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. Soient S_h (resp. N_h) l'élément de $S^h(V)$ (la $h^{\text{ème}}$ composante de l'algèbre symétrique de V) égal à la $h^{\text{ème}}$ fonction symétrique élémentaire des x_i (resp. la $h^{\text{ème}}$ fonction symétrique de Newton en les x_i). Nous montrons qu'il existe des expressions universelles à coefficients dans $\mathbb{Z}$, P^k , appelées formes multilinéaires de Waring, telles que l'on ait $h!S_h = P^h(N_1; \dots; N_h)$, et telles que réciproquement étant donnés des éléments N'_h de $S^h(V)$, pour tout $h \in \mathbb{N}$, ce soient les fonctions symétriques de Newton d'éléments $x'_1, \dots, x'_k$ de V si et seulement si on a $N'_0 = k$ et pour tous $i_1, i_2, \dots, i_{k+1} \in \mathbb{N}$, $P^{k+1}(N'_{i_1}, \dots, N'_{i_{k+1}}; \dots; N'_{i_1+\dots+i_{k+1}}) = 0$, où cette expression est l'expression polarisée associée à P^{k+1} (cf. [Théorème 1.5.3](#)). Plus généralement, on montre que, étant donnée une forme linéaire θ sur V^* , pour qu'il existe une famille de k points $(x_i)_{i \in I}$ telle que $(\forall f \in V^*, \theta(f) = \sum_{i \in I} f(x_i))$, il faut et il suffit que l'on ait $P_\theta^{k+1} = 0$ ([1.5.3](#)). On traite même ici le cas d'un morphisme de A -modules $\theta : B \rightarrow A$, où A est un anneau de caractéristique zéro quelconque, et B une A -algèbre.

p. 9

1.1. Règles de signes

1.1.1. Dans tout ce paragraphe, nous nous placerons dans une catégorie abélienne $\mathcal{A}$ $\mathbb{Q}$ -linéaire, munie d'un produit tensoriel $\otimes$, associatif, commutatif, unitaire, tel que les foncteurs $X \mapsto A \otimes X$ soient additifs et exacts à droite pour tout A dans $\mathcal{A}$.

1.1.2. EXEMPLES.

1.1.2.1. $\mathcal{A}$ est la catégorie des $\mathbb{Q}$ -espaces vectoriels gradués $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -gradués, avec le produit tensoriel usuel, la contrainte de commutativité $V \otimes W \xrightarrow{\sim} W \otimes V$ étant $v \otimes w \mapsto (-1)^{\varepsilon(v)\varepsilon(w)} w \otimes v$ où v et w sont homogènes de degré $\varepsilon(v)$ et $\varepsilon(w)$.

p. 10

1.1.2.2. $\mathcal{A}$ est la catégorie des $\mathbb{Q}$ -espaces vectoriels $\mathbb{Z}$ -gradués, avec le produit tensoriel usuel et la même contrainte de commutativité.

1.1.2.3. $\mathcal{A}$ est la catégorie des $\mathbb{Q}$ -espaces vectoriels différentiels $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -gradués, avec les mêmes définitions qu'en [1.1.2.1](#), la dérivation sur le produit tensoriel étant $d(v \otimes w) = dv \otimes w + (-1)^{\varepsilon(v)\varepsilon(d)} v \otimes dw$, pour v homogène.

De fait, la plupart des constructions usuelles d'algèbre multilinéaire sont "catégorisables" et peuvent se faire dans le cadre [1.1.1](#). Pour travailler dans une catégorie $\mathcal{A}$ quelconque, il est commode de pouvoir parler d'"éléments", de sorte que des manipulations algébriques usuelles fournissent les résultats voulus, sans que l'on ait à les remplacer par des diagrammes. Il est donc pratique d'adopter le

1.1.3. LANGAGE.

1.1.3.1. Si V est un objet de $\mathcal{A}$, nous appellerons élément x de V , et nous noterons $x \in V$, un morphisme x d'un objet T de $\mathcal{A}$ dans V .

Ainsi, l'expression "pour tout x dans V " signifiera : "pour tout objet T de $\mathcal{A}$ et pour tout morphisme $x : T \rightarrow V$ ".

1.1.3.2. Étant donnés $x_1 : T_1 \rightarrow V_1$ et $x_2 : T_2 \rightarrow V_2$ deux éléments de V_1 et V_2 , on définit leur produit $x_1 x_2$ comme étant l'élément de $V_1 \otimes V_2$ égal au morphisme $x_1 \otimes x_2 : T_1 \otimes T_2 \rightarrow V_1 \otimes V_2$.

Plus généralement, $P(X_1, \dots, X_n)$ est une forme polarisée (i.e. homogène de degré 1 en chacune des variables), définie sur les V_i et à valeur dans W , si à $x_i : T_i \rightarrow V_i$, elle associe un élément $P(x_1, \dots, x_n) : \bigotimes_i T_i \rightarrow W$.

Si de plus, pour tous éléments t_i de T_i , avec $t_i : T'_i \rightarrow T_i$, on a $P(x_1 \circ t_1, x_2 \circ t_2, \dots, x_n \circ t_n) = P(x_1, \dots, x_n) \circ (t_1 \otimes t_2 \otimes \dots \otimes t_n)$, P définit un morphisme $\bigotimes_i V_i \rightarrow W$. | p. 11

1.1.3.3. Le produit tensoriel étant commutatif, pour tout élément σ du groupe symétrique $\mathfrak{S}_k$, on a un isomorphisme : $T_1 \otimes T_2 \otimes \dots \otimes T_k \xrightarrow{\sim} T_{\sigma_1} \otimes \dots \otimes T_{\sigma_k}$. Nous noterons $\sigma(x_1 \otimes \dots \otimes x_n)$ l'image de $x_1 \otimes \dots \otimes x_n$ par cet isomorphisme.

En prenant tous les T_i égaux, on en déduit que $\mathfrak{S}_k$ agit sur $T^{\otimes k}$. Notons $\text{Sym}^k T$ le sous-objet de $T^{\otimes k}$ formé des invariants sous cette action.

Nous dirons que $P(X_1, \dots, X_n)$ est un polynôme homogène de degré n_i en la $i^{\text{ème}}$ variable, défini sur les V_i , et à valeurs dans une algèbre commutative B (1.2.1), si il associe à des éléments $x_i : T_i \rightarrow V_i$, un élément $P(x_1, \dots, x_n) : \bigotimes_i \text{Sym}^{n_i}(T_i) \rightarrow B$.

1.1.3.4. Étant donné un polynôme $P(X_1, \dots, X_n)$ de degré k_i en la $i^{\text{ème}}$ variable, défini sur les V_i à valeurs dans une algèbre commutative B , il existe une forme polarisée en $\sum_i k_i$ variables $Q(X_1^1, \dots, X_1^{k_1}; X_2^1, \dots, X_n^{k_n})$, invariante par l'action des groupes symétriques $\mathfrak{S}_{k_1}, \dots, \mathfrak{S}_{k_n}$, et une seule, telle que pour tous x_i éléments de V_i on ait : $P(x_1, \dots, x_n) = Q(x_1, \dots, x_1; x_2, \dots, x_2; \dots; x_n, \dots, x_n)$; Q est la forme polarisée associée à P .

1.1.3.5. Avec le langage ci-dessus, une formule permet de définir un morphisme. Ainsi, si C est une algèbre commutative (1.2.1) de $\mathcal{A}$, M un objet de $\mathcal{A}$, on considérera des formes multilinéaires $f : M^{\otimes k} \rightarrow C$, pouvant s'écrire comme somme de formes du type : $f : M^{\otimes k} \rightarrow C : f(x_1 \otimes \dots \otimes x_k) = \prod_{i=1}^k f_i(x_{\sigma(i)})$ où $\sigma \in \mathfrak{S}_k$, $f_i \in \text{Hom}(M, C)$. Si pour $i = 1, \dots, k$, $x_i : T_i \rightarrow M$ est un élément de M , $f(x_1 \otimes \dots \otimes x_k)$ sera alors l'élément de $C : T_1 \otimes \dots \otimes T_k \rightarrow C$ égal au composé : $T_1 \otimes \dots \otimes T_m \xrightarrow{x_1 \otimes \dots \otimes x_m} M^{\otimes k} \xrightarrow{\sigma} M^{\otimes k} \xrightarrow{\prod_i f_i} C$.

Si par exemple, $\mathcal{A}$ est la catégorie 1.1.2.2, et si B est une algèbre anticommutative graduée, on dira "soit f le morphisme $B \otimes B \otimes B \rightarrow B \otimes B : f(x_1 \otimes x_2 \otimes x_3) = x_1 x_3 \otimes x_2 + x_2 \otimes x_1 x_3$ ". Si, pour $i = 1, 2, 3$, $x_i : T_i \rightarrow B$ est un élément de B homogène de degré d_i , cela signifiera que $f(x_1 \otimes x_2 \otimes x_3)$ est la somme des deux morphismes : | p. 12

$$\begin{aligned} T_1 \otimes T_2 \otimes T_3 &\xrightarrow{x_1 \otimes x_2 \otimes x_3} B \otimes B \otimes B \xrightarrow{1_B \otimes i} B \otimes B \otimes B \xrightarrow{\Pi \otimes 1_B} B \otimes B \\ T_1 \otimes T_2 \otimes T_3 &\xrightarrow{x_1 \otimes x_2 \otimes x_3} B \otimes B \otimes B \xrightarrow{i \otimes 1_B} B \otimes B \otimes B \xrightarrow{1_B \otimes \Pi} B \otimes B \end{aligned}$$

où 1_B est le morphisme identique de B , i est le morphisme de commutativité du produit tensoriel $i : B \otimes B \rightarrow B \otimes B$, et Π est le morphisme produit $B \otimes B \rightarrow B$.

En particulier, si $T_i = \mathbb{Q}$ ($i = 1, 2, 3$) et si les x_i sont donc des éléments de B au sens ordinaire, f correspond au morphisme qui, en notation classique se notait : $f(x_1 \otimes x_2 \otimes x_3) = (-1)^{d_2 d_3} x_1 x_3 \otimes x_2 + (-1)^{d_1 d_2} x_2 \otimes x_1 x_3$.

De même, si B et C sont deux algèbres commutatives de $\mathcal{A}$, un polynôme $P(X_1, \dots, X_n)$ homogène de degré n_i en la $i^{\text{ème}}$ variable : $P : B^{\otimes n} \rightarrow C$, est donné par une formule homogène de degré n_i en la $i^{\text{ème}}$ variable. Pour le voir, il suffit de se ramener au cas des formes polarisées, en appliquant, d'une part le principe de polarisation dépoliarisation au niveau des "algèbres commutatives", comme indiqué en 1.1.3.4, et d'autre part le principe usuel de polarisation dépoliarisation permettant

de passer d'une forme homogène de degré n en une variable à une forme multilinéaire symétrique en n variables.

Donnons-en un exemple que nous rencontrerons plus loin : soient $\mathcal{A}$ la catégorie 1.1.2.2, A et B deux algèbres anticommutatives graduées et $\theta : B \rightarrow A$ une forme linéaire. On posera “soit $P(x) = \theta(x)^3 - 3\theta(x)\theta(x^2) + 2\theta(x^3)$ l'application polynômiale de degré 3 : $B \rightarrow A$ ”. La forme multilinéaire symétrique associée à P est la forme Q où $Q(x_1, x_2, x_3) = \theta(x_1)\theta(x_2)\theta(x_3) - \theta(x_1)\theta(x_2x_3) - \theta(x_2)\theta(x_1x_3) - \theta(x_1x_2)\theta(x_3) + 2\theta(x_1x_2x_3)$. D'après ce que l'on a vu, et d'après 1.1.3.4, on associe à Q le polynôme P qui à $x : T \rightarrow B$ fait correspondre $P(x) : \text{Sym}^3(T) = T \otimes T \otimes T / \mathfrak{S}_3 \rightarrow A$, donné par

$$\begin{aligned} P(x)(t_1 \otimes t_2 \otimes t_3) &= \theta(x(t_1))\theta(x(t_2))\theta(x(t_3)) - \theta(x(t_1))\theta(x(t_2t_3)) \\ &\quad - (-1)^{\varepsilon(x(t_1))\varepsilon(x(t_2))}\theta(x(t_2))\theta(x(t_1)x(t_3)) - \theta(x(t_1)x(t_2))\theta(x(t_3)) \\ &\quad + 2\theta(x(t_1) \cdot x(t_2) \cdot x(t_3)), \end{aligned}$$

où $t_1 \otimes t_2 \otimes t_3$ est l'image dans $\text{Sym}^3(T)$ de $t_1 \otimes t_2 \otimes t_3 \in T^{\otimes 3}$.

1.1.3.6. Ce langage est commode car il permet par exemple de traiter le cas des algèbres anticommutatives graduées en écrivant les démonstrations dans le cadre plus confortable des algèbres commutatives. D'après le formalisme 1.1.3.5, pour démontrer une identité dans le cadre des algèbres commutatives d'une catégorie $\mathcal{A}$ comme dans 1.1.1, il suffit de la démontrer dans le cadre des algèbres commutatives ordinaires. Il en irait autrement pour des théorèmes d'existence abstraits. Ainsi un énoncé tel que : “Soient A une algèbre commutative, M un A -module de type fini, alors il existe un entier n tel que $\bigwedge^n M = 0$ ” devient faux dans le cadre 1.1.1. Le lecteur pourra vérifier que tous les énoncés du chapitre 1 sont, soit des identités, soit des théorèmes d'existence explicites 1.5.3 dont l'énoncé pourrait être ramené à des identités, et qu'il suffit donc de les montrer dans le cadre des algèbres commutatives pour pouvoir les appliquer dans le cadre 1.1.1. Toutefois, lors de leur application dans le cadre des algèbres anticommutatives graduées dans les chapitres suivants, il faudra se garder d'effectuer des opérations telles que “faire prendre une valeur à la variable” dans des expressions non polarisées telles que 1.4.2.2.

1.2. Tenseurs symétriques

1.2.1. Soit $\mathcal{A}$ une catégorie comme dans 1.1.1 et soit $\mathcal{A}'$ la sous-catégorie de $\mathcal{A}$ formée des algèbres commutatives de $\mathcal{A}$. Un objet A de $\mathcal{A}'$ est donc un objet de $\mathcal{A}$ muni d'un produit $\Pi : A \otimes A \rightarrow A$, et d'un élément unité $1 : 1 \rightarrow A$ tels que l'on ait, si i est l'isomorphisme de commutativité du produit tensoriel, $i : A \otimes A \rightarrow A \otimes A$, $\Pi \circ i = \Pi(xy = yx)$, $\Pi \circ (\Pi \otimes 1_A) = \Pi \circ (1_A \otimes \Pi)$ ($x(yz) = (xy)z$), $\Pi \circ (1 \otimes 1_A) = 1_A$ ($1 \cdot x = x$).

1.2.2. EXEMPLE. Si $\mathcal{A}$ est la catégorie de 1.1.2.1, $\mathcal{A}'$ sera la catégorie des algèbres anti-commutatives graduées.

En effet, si $A^\bullet$ et $B^\bullet$ sont deux objets de $\mathcal{A}'$, $A^\bullet \otimes B^\bullet$ est encore une algèbre anti-commutative graduée [4, §4 n° 9 Proposition 14]; de plus, la compatibilité de l'isomorphisme de commutativité i et du produit tensoriel résultant de la relation

$$\begin{aligned} i[(a_1 \otimes a_2)(a'_1 \otimes a'_2)] &= (-1)^{\varepsilon(a_2)\varepsilon(a'_1)}i(a_1a'_1 \otimes a_2a'_2) \\ &= (-1)^{\varepsilon(a_2)\varepsilon(a'_1) + \varepsilon(a_1a'_1)\varepsilon(a_2a'_2)}a_2a'_2 \otimes a_1a'_1 \\ &= (-1)^{\varepsilon(a_1)\varepsilon(a_2) + \varepsilon(a'_1)\varepsilon(a'_2)}(a_2 \otimes a_1)(a'_2 \otimes a'_1) \\ &= i(a_1 \otimes a_2) \cdot i(a'_1 \otimes a'_2). \end{aligned}$$

1.2.3. Soit A un objet de $\mathcal{A}'$ et soit B un objet de $\mathcal{A}$ qui soit un A -module. On note $B^{\otimes k}$ le produit tensoriel sur A de k exemplaires de B (la sous-catégorie de $\mathcal{A}$

formée des objets A -linéaires et munie du produit tensoriel relatif sur A possède encore les propriétés 1.1.1 car on a $X \otimes_A Y = \text{coker}(X \otimes A \otimes Y \rightrightarrows X \otimes Y)$.

On a vu 1.1.3.3 que le groupe symétrique $\mathfrak{S}_k$ opère sur $B^{\otimes k}$. Si $\text{TS}^k(B)$ est le sous-module de $B^{\otimes k}$ formé des tenseurs invariants par cette action, la suite exacte $0 \rightarrow \text{TS}^k(B) \rightarrow B^{\otimes k} \rightarrow B^{\otimes k}/\text{TS}^k(B) \rightarrow 0$ est scindée pour la scission $B^{\otimes k} \rightarrow \text{TS}^k(B) : x_1 \otimes \cdots \otimes x_k \mapsto \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \sigma(x_1 \otimes \cdots \otimes x_k)$. Ceci permet, après tensorisation par A , de poser la :

1.2.4. DÉFINITION. On appelle $k^{\text{ème}}$ module de tenseurs symétriques de B sur A et on note $\text{TS}_A^k(B)$ le sous-module de $B^{\otimes k}$ formé des tenseurs invariants par l'action du groupe symétrique $\mathfrak{S}_k$.

1.2.5. PROPOSITION. Si B est une A -algèbre de $\mathcal{A}'$, il en est de même de $\text{TS}_A^k(B)$.

Puisque l'isomorphisme de commutativité du produit tensoriel est compatible avec le produit dans $B^{\otimes k}$, le produit de deux éléments invariants par l'action d'une permutation σ est encore invariant par l'action de σ , ce qui prouve que $\text{TS}_A^k(B)$ est une A -algèbre.

p. 15

1.3. Complexe simplicial strict associé à une trace

On suppose désormais que B est une A -algèbre de $\mathcal{A}'$, et on se donne une "trace" θ , morphisme de A -modules.

1.3.1. DÉFINITION. On appelle complexe simplicial strict associé à θ , le complexe

$$\cdots \rightrightarrows B^{\otimes k} \begin{array}{c} \xrightarrow{d_1^k} \\ \vdots \\ \xrightarrow{d_k^k} \end{array} B^{\otimes k} \begin{array}{c} \xrightarrow{d_1^{k-1}} \\ \vdots \\ \xrightarrow{d_{k-1}^{k-1}} \end{array} \cdots \rightrightarrows B \otimes_A B \begin{array}{c} \xrightarrow{d_1^2} \\ \vdots \\ \xrightarrow{d_2^2} \end{array} B \xrightarrow{\theta=d_1^1} A$$

où, si $x_1, \dots, x_k$ sont des éléments de B , on a posé : $d_j^k(x_1 \otimes \cdots \otimes x_k) = \theta(x_j)x_1 \otimes \cdots \otimes \widehat{x_j} \otimes \cdots \otimes x_k - \sum_{\substack{\ell \neq 1 \\ \ell \neq j}}^k x_1 \otimes \cdots \otimes x_\ell x_j \otimes \cdots \otimes \widehat{x_j} \otimes \cdots \otimes x_k$.

Le fait que le complexe ci-dessus est semi-simplicial est bien connu. Le lecteur pourra aisément vérifier directement que l'on a : si $1 \leq j < h \leq k$, $d_j^{k-1} \circ d_h^k = d_{h-1}^{k-1} \circ d_j^k$.

1.3.2. DÉFINITION. Dans le complexe semi-simplicial ci-dessus, l'application composée : $B^{\otimes k} \rightarrow A$, est indépendante du chemin suivi et induit donc une k -forme multilinéaire invariante par l'action de $\mathfrak{S}_k$ définie en 1.1.3.3 que nous noterons $(x_1, \dots, x_k) \mapsto P_\theta^k(x_1, \dots, x_k)$ et que nous appellerons $k^{\text{ème}}$ forme multilinéaire de Wäring.

1.4. Calcul des formes multilinéaires de Wäring

1.4.1. PROPOSITION. Soit x_i un élément de B pour $i = 1, 2, \dots, k$. On a alors :

$$\begin{aligned} P_\theta^1(x_1) &= \theta(x_1) \\ P_\theta^2(x_1, x_2) &= \theta(x_1)\theta(x_2) - \theta(x_1x_2) \\ P_\theta^3(x_1, x_2, x_3) &= \theta(x_1)\theta(x_2)\theta(x_3) - \theta(x_1x_2)\theta(x_3) - \theta(x_1)\theta(x_2x_3) - \\ &\quad \theta(x_1x_3)\theta(x_2) + 2\theta(x_1x_2x_3) \end{aligned}$$

et

| p. 16

(1.4.1.1)

$$P_\theta^k(x_1, \dots, x_k) = \sum_{s \in \mathcal{S}_k} (-1)^{k-|s|} \left(\prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{s(j)}} \right) \frac{1}{s!} \left[\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} (\theta(x_{\sigma_1}) \cdots \theta(x_{\sigma_{s(1)}})) \right. \\ \left. (\theta(x_{\sigma_{s(1)+1}} x_{\sigma_{s(1)+2}}) \cdots \theta(x_{\sigma_{s(1)+2s(2)-1}} x_{\sigma_{s(1)+2s(2)}})) \cdots \right. \\ \left. (\theta(x_{\sigma_{s(1)+2s(2)+\dots+(k-1)s(k-1)+1}} \cdots x_{\sigma_k})) \right]$$

où $\mathcal{S}_k$ est l'ensemble des applications s de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}$ telles que $\sum_{j=1}^{\infty} js(j) = k$, et où l'on a posé $|s| = \sum_{j=1}^{\infty} s(j)$ et $s! = \prod_j s(j)!$.

Cette formule peut se réécrire

$$(1.4.1.2) \quad P_\theta^k(x_1, \dots, x_k) = \sum_{\substack{\alpha_1 i_1 + \dots + \alpha_\ell i_\ell = k \\ i_1 < i_2 < \dots < i_\ell}} (-1)^{k-\sum \alpha_i} (i_1 - 1)!^{\alpha_1} \cdots (i_\ell - 1)!^{\alpha_\ell} \\ \left[\prod_{j=1}^{\ell} \prod_{h=0}^{\alpha_j-1} \theta \left(\prod_{r=1}^{i_j} x_{\sum_{m=1}^{\ell-1} \alpha_m i_m + h i_j + r} \right) \right]^\sigma,$$

où σ désigne le symétrisé sans répétition du crochet (on recopie chaque terme différent obtenu en faisant permuer les x_i une fois).

L'équivalence entre les formules (1.4.1.1) et (1.4.1.2) est claire car (1.4.1.1) se réécrit :

$$P_\theta^k(x_1, \dots, x_k) = \sum_{\substack{\alpha_1 i_1 + \dots + \alpha_\ell i_\ell = k \\ i_1 < \dots < i_\ell}} (-1)^{k-\sum \alpha_i} \frac{1}{i_1^{\alpha_1} \cdots i_\ell^{\alpha_\ell}} \cdot \frac{1}{\alpha_1! \cdots \alpha_\ell!} \\ \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \prod_{j=1}^{\ell} \prod_{h=0}^{\alpha_j-1} \theta \left(\prod_{r=1}^{i_j} x_{\sigma(\sum_{m=1}^{j-1} \alpha_m i_m + h i_j + r)} \right)$$

et il y a $\alpha_1! \cdots \alpha_\ell! (i_1!)^{\alpha_1} \cdots (i_\ell!)^{\alpha_\ell}$ éléments de $\mathfrak{S}_k$ donnant le même monôme.

Nous montrons donc (1.4.1.2) par récurrence sur k . La formule est vraie si $k = 1$ par définition. De plus, on a :

$$P_\theta^{k+1}(x_1, \dots, x_{k+1}) = P_\theta^k(x_1, \dots, x_k) \theta(x_{k+1}) - \sum_{\ell=1}^k P_\theta^k(x_1, \dots, x_\ell x_{k+1}, \dots, x_k).$$

Ainsi, chaque monôme M de $P_\theta^{k+1}(x_1, \dots, x_{k+1})$ s'écrit, ou bien $M' \cdot \theta(x_{k+1})$, ou bien $\theta(x_{i_1} \cdots x_{i_j} x_{k+1}) M''$ et d'après la formule ci-dessus, le coefficient de M dans $P_\theta^{k+1}(x_1, \dots, x_{k+1})$ doit être égal au coefficient de M' dans P_θ^k dans le premier cas, et à $-j$ fois le coefficient de $\theta(x_{i_1} \cdots x_{i_j}) M''$ dans P_θ^k dans le second cas. C'est bien ce que l'on vérifie sur la formule (1.4.1.2).

| p. 17

1.4.2. Polynôme de Waring.

1.4.2.1. DÉFINITION. On appelle $k^{\text{ème}}$ polynôme de Waring associé à θ , et on note $P_\theta^k(x)$ l'application polynômiale associée par 1.1.3.4 à l'expression polarisée $P_\theta^k(x_1, \dots, x_k) : P_\theta^k(x) = P_\theta^k(x, \dots, x)$.

P_θ^k est une application polynômiale de degré k de B dans A au sens de 1.1.3.4. Elle est définie sans hypothèse restrictive en vertu des conventions de 1.1.3.5.

Notons que puisque nous sommes en caractéristique zéro, on a :

$$(\forall x \in B, P_\theta^k(x) = 0) \iff (\forall x_1, \dots, x_k \in B, P_\theta^k(x_1, \dots, x_k) = 0).$$

1.4.2.2. PROPOSITION. On a :

1°)

$$P_\theta^k(x) = \sum_{s \in \mathcal{S}_k} (-1)^{k-(s)} \left(\prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{s(j)}} \right) \frac{k!}{s!} \prod_{j=1}^k \theta(x^j)^{s(j)}.$$

2°)

$$P_\theta^k(x) = \begin{vmatrix} \theta(x) & \theta(x^2) & \cdots & \cdots & \cdots & \theta(x^k) \\ 1 & \theta(x) & \ddots & \cdots & \cdots & \theta(x^{k-1}) \\ & 2 & \theta(x) & \ddots & & \\ & & 3 & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & \ddots & \ddots & \theta(x^2) \\ & & & & k-1 & \theta(x) \end{vmatrix}.$$

La première relation résulte immédiatement de la **proposition 1.4.1**. Montrons la seconde par récurrence sur k . La relation est triviale si $k = 1$. D'après les relations de récurrence déduites de **1.3.1**, on a :

p. 18

$$\begin{aligned} P_\theta^k(x) &= \theta(x)P_\theta^{k-1}(x) - (k-1)P_\theta^{k-1}(x, x, \dots, x, x^2) \\ &= \theta(x)P_\theta^{k-1} - (k-1)\theta(x^2)P_\theta^{k-2}(x) + (k-1)(k-2)P_\theta^{k-2}(x, \dots, x, x^3) \\ &= \dots \\ &= \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} \frac{(k-1)!}{(k-i)!} \theta(x^i) P_\theta^{k-i}(x). \end{aligned}$$

En développant le déterminant de l'énoncé suivant la dernière colonne, et en appliquant l'hypothèse de récurrence, on obtient bien la relation annoncée.

1.5. La trace universelle

Soient A et B comme dans **1.3.1** et $k \in \mathbb{N}^*$.

1.5.1. DÉFINITION. On appelle trace universelle associée à A et B le morphisme de $\text{TS}_A^k(B)$ -module $\rho_k : B \otimes_A \text{TS}_A^k(B) \rightarrow \text{TS}_A^k(B)$ donné par

$$\rho_k(b \otimes x) = \left(\sum_{i=1}^k 1 \otimes 1 \otimes \cdots \otimes \underset{i^{\text{ème place}}}{b} \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1 \right) \cdot x.$$

1.5.2. PROPOSITION. Supposons que l'on ait A un anneau commutatif et $B = A[X]$. Alors, si l'on note S_j le $j^{\text{ème}}$ polynôme symétrique élémentaire, on a : $j!S_j = P_{\rho_k}^j(X)$, si $j \leq k$, et $P_{\rho_k}^j(X) = 0$, si $j > k$.

En d'autres termes, si $N_i = \rho_k(X^i)$ est le $i^{\text{ème}}$ polynôme symétrique de Newton, et si l'on pose d'après **1.4.2.2**

$$P_k(X_1, \dots, X_k) = \begin{vmatrix} X_1 & X_2 & \cdots & \cdots & X_k \\ 1 & X_1 & X_2 & \cdots & X_{k-1} \\ & 2 & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \ddots & \ddots & X_2 \\ & & & k-1 & X_1 \end{vmatrix},$$

on a $j!S_j = P_k(N_1, \dots, N_k)$.

Notons $\text{TS}_A^k B = A[X_1, \dots, X_k]^\sigma$. Plaçons-nous dans $\text{TS}_A^k B[[Y]]$ et posons $S'_j = (-1)^j S_j$ si $j \leq k$, et $S'_j = 0$ si $j > k$.

Soit

$$(*) \quad Q = \prod_{i=1}^k (1 - X_i Y) = \sum_{j=0}^{\infty} S'_j Y^j.$$

On a :

$$\log Q = \sum_{i=1}^k \log(1 - X_i Y) = - \sum_{p=1}^{\infty} \rho_k(X^p) \cdot \frac{1}{p} Y^p,$$

d'où :

$$(**) \quad Q = \exp(\log Q) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\log Q)^m}{m!} = \sum_{m \geq 0} \frac{\left(- \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p} \rho_k(X^p) Y^p \right)^m}{m!}.$$

En comparant $(*)$ et $(**)$, il vient d'après la formule multinomiale :

$$S'_j = \sum_{s \in \mathcal{S}_j} (-1)^{|s|} \frac{1}{s!} \prod_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{\ell^{s(\ell)}} \prod_{i=1}^k (X^i)^{s(i)}$$

d'où en vertu de [1.4.2.2 1°](#)), $j! S'_j = (-1)^j P_{\rho_k}^j(X)$, ce qui prouve [1.5.2](#).

1.5.3. THÉORÈME. Soient A et B comme dans [1.3.1](#), et soit θ un morphisme de A -modules $\theta : B \rightarrow A$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes.

- (i) Il existe un morphisme de A -algèbres $\Psi : \text{TS}_A^k(B) \rightarrow A$ tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} B \otimes_A \text{TS}_A^k(B) & \xrightarrow{\rho_k} & \text{TS}_A^k(B) \\ \text{pr}_1 \uparrow & & \downarrow \Psi \\ B & \xrightarrow{\theta} & A \end{array}$$

- (ii) $P_{\theta}^{k+1} : B_A^{\otimes k+1} \rightarrow A$ est nul et $\theta(1) = k$.

De plus, lorsque ces conditions sont vérifiées, Ψ est déterminée de manière unique ; plus précisément on a, si $\forall x_i \in B$:

$$\Psi \left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \sigma(x_1 \otimes \cdots \otimes x_k) \right) = P_{\theta}^k(x_1, \dots, x_k)$$

soit encore [1.1.3.5](#), [1.4.2.1](#) $k! \Psi(x^{\otimes k}) = P_{\theta}^k(x)$.

Montrons d'abord que si Ψ existe, on a bien :

$$\Psi \left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \sigma(x_1 \otimes \cdots \otimes x_k) \right) = P_{\theta}^k(x_1, \dots, x_k).$$

Montrons pour cela par récurrence sur k la relation :

$$(1.5.3.1) \quad \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \sigma(x_1 \otimes \cdots \otimes x_k) = P_{\rho_k}^k(x_1, \dots, x_k)$$

(on a identifié x_i et $\text{pr}_1(x_i)$).

Si l'on note ρ_{k+1}^k l'application : $B_A^{\otimes k} \rightarrow B_A^{\otimes k+1}$ donnée par $\rho_{k+1}^k(x_1 \otimes \cdots \otimes x_k) = \sum_{i=1}^{k+1} x_1 \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_{i-1} \otimes 1 \otimes x_i \otimes \cdots \otimes x_{k+1}$. On a en effet :

$$\begin{aligned}
& \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+1}} \sigma(x_1 \otimes \cdots \otimes x_{k+1}) = \rho_{k+1}^k \left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \sigma(x_1 \otimes \cdots \otimes x_k) \rho_{k+1}(x_{k+1}) \right) \\
& - \sum_{\ell=1}^k (-1)^{d_{k+1}(\sum_{\ell < h \leq k} d_h)} \rho_{k+1}^k \left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \sigma(x_1 \otimes \cdots \otimes x_\ell x_{k+1} \otimes \cdots \otimes x_k) \right) \\
& = \rho_{k+1}^k (P_{\rho_k}^k(x_1, \dots, x_k)) \rho_{k+1}(x_{k+1}) - \sum_{\ell=1}^k \rho_{k+1}^k (P_{\rho_k}^k(x_1, \dots, x_\ell x_{k+1}, \dots, x_k)) \\
& = P_{\rho_{k+1}}^k(x_1, \dots, x_k) \rho_{k+1}(x_{k+1}) - \sum_{\ell=1}^k P_{\rho_{k+1}}^k(x_1, \dots, x_\ell x_{k+1}, \dots, x_k) \\
& = P_{\rho_{k+1}}^{k+1}(x_1, \dots, x_{k+1}).
\end{aligned}$$

Ceci prouve (1.5.3.1).

Dès lors, si Ψ existe, on a :

$$\begin{aligned}
(1.5.3.2) \quad \Psi \left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \sigma(x_1 \otimes \cdots \otimes x_k) \right) &= \Psi(P_{\rho_k}^k(x_1, \dots, x_k)) \\
&= P_{\Psi \circ \rho_k}^k(x_1, \dots, x_k) = P_\theta^k(x_1, \dots, x_k).
\end{aligned}$$

Ceci prouve l'unicité de Ψ , les éléments de la forme $\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \sigma(x_1 \otimes \cdots \otimes x_k)$ engendrant $\text{TS}_A^k(B)$ (on est en caractéristique zéro).

Montrons maintenant (i) $\implies$ (ii).

Si Ψ existe, on a :

$$\theta(1) = \Psi \circ \rho_k \circ \text{pr}_1(1) = \Psi \circ \rho_k(1) = \Psi(k) = k\Psi(1) = k$$

et

$$\begin{aligned}
& P_\theta^{k+1}(x_1, \dots, x_{k+1}) \\
& = P_\theta^k(x_1, \dots, x_k) \cdot \theta(x_{k+1}) - \sum_{\ell=1}^k P_\theta^k(x_1, \dots, x_\ell x_{k+1}, \dots, x_k) \\
& = \Psi \left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \sigma(x_1 \otimes \cdots \otimes x_k) \right) \Psi(\rho_k(x_{k+1})) \\
& \quad - \sum_{\ell=1}^k \Psi \left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \sigma(x_1 \otimes \cdots \otimes x_\ell x_{k+1} \otimes \cdots \otimes x_k) \right) \\
& = \Psi \left[\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \sigma(x_1 \otimes \cdots \otimes x_k) \rho_k(x_{k+1}) - \sum_{\ell=1}^k \sigma(x_1 \otimes \cdots \otimes x_\ell x_{k+1} \otimes \cdots \otimes x_k) \right] \\
& = \Psi(0) = 0.
\end{aligned}$$

Montrons maintenant (ii) $\implies$ (i).

On a tout d'abord le

| p. 21

1.5.3.3. LEMME. Soient R un anneau commutatif, et S une R -algèbre commutative engendrée par un sous- R -module A . Soit φ un morphisme de R -modules $S \rightarrow R$. Alors pour que φ soit un morphisme d'anneaux, il faut et il suffit que l'on ait $\varphi(1) = 1$, et

$$\forall s \in S, \quad \forall \alpha \in A, \quad \varphi(s \cdot \alpha) = \varphi(s)\varphi(\alpha).$$

La nécessité est claire et, pour montrer la suffisance, il suffit de montrer que l'on a $\forall s \in S, \forall \alpha_1, \dots, \alpha_k \in A, \varphi\left(s \cdot \prod_{i=1}^k \alpha_i\right) = \varphi(s)\varphi\left(\prod_{i=1}^k \alpha_i\right)$. Or on a : $\varphi\left(s \cdot \prod_{i=1}^k \alpha_i\right) = \varphi\left(s \prod_{i=1}^{k-1} \alpha_i\right) \varphi(\alpha_k) = \varphi\left(s \prod_{i=1}^{k-2} \alpha_i\right) \varphi(\alpha_{k-1}) \varphi(\alpha_k) = \dots = \varphi(s) \prod_{i=1}^k \varphi(\alpha_i) = \varphi(s) \varphi(\alpha_1 \alpha_2) \prod_{i=3}^k \varphi(\alpha_i) = \dots = \varphi(s) \varphi\left(\prod_{i=1}^k \alpha_i\right)$.

Sous les hypothèses de (ii), soit Ψ l'unique morphisme de A -modules : $\text{TS}_A^k(B) \rightarrow A$ vérifiant (1.5.3.2). D'après (1.5.3.1), $\text{TS}_A^k(B)$ est engendrée en tant que A -algèbre par les termes de la forme $\rho_k(x)$. D'après 1.5.3.3, pour vérifier que Ψ est un morphisme d'anneaux, il suffit donc de montrer que l'on a :

$$— \Psi(1) = 1,$$

—

$$\begin{aligned} & \Psi\left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \sigma(x_1 \otimes \dots \otimes x_k)\right) \Psi(\rho_k(x_{k+1})) \\ &= \Psi\left(\sum_{\ell=1}^k \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \sigma(x_1 \otimes \dots \otimes x_\ell x_{k+1} \otimes \dots \otimes x_\ell)\right). \end{aligned}$$

Or la première relation s'écrit :

$$\Psi(1) = \Psi\left(\frac{1}{k} \rho_k(1)\right) = \frac{1}{k} \theta(1) = 1 \quad \text{soit} \quad \theta(1) = k$$

et la seconde s'écrit

$$P_\theta^{k+1}(x_1, \dots, x_{k+1}) = 0, \quad \text{comme on l'a vu.}$$

Ceci termine la démonstration de 1.5.3.

1.5.4. COROLLAIRE. Si, sous les hypothèses du **théorème 1.5.3** on suppose que pour tous $x_1, \dots, x_{k+1} \in B$, on ait $P_\theta^{k+1}(x_1, \dots, x_{k+1}) = 0$, alors, il existe une unique décomposition $A = \prod_{i=0}^k A_i$, telle que si $B_i = B \otimes_A A_i$, et si θ_i est la trace $B_i \rightarrow A_i$ déduite de θ par le changement de base $A \rightarrow A_i$, alors les conditions (i) et (ii) du **théorème 1.5.3** soient vérifiées pour θ_i et i , pour tout $i \in \{0, 1, \dots, k\}$.

| p. 22

On a d'abord le lemme :

1.5.4.1. LEMME. Soit A une $\mathbb{Q}$ -algèbre commutative, et soit $u \in A$ tel que $\prod_{i=0}^k (u - i) = 0$. Alors, il existe une unique décomposition $A = \prod_{i=0}^k A_i$ telle que l'image de u dans A_i soit égale à i .

L'unicité est claire. Pour montrer l'existence il suffit de montrer que le morphisme $A \rightarrow \prod_{i=0}^k A/(u - i)$ est un isomorphisme. D'après le théorème chinois, il suffit de montrer que si $i \neq j$, $(u - i) + (u - j) = A$ et que $\bigcap_{i=0}^k (u - i) = (0)$ or si $i \neq j$, on a $1 = \frac{(u-i)-(u-j)}{j-i}$, et donc $A = (u - i) + (u - j)$.

Par ailleurs soit $x \in \bigcap_{i=0}^k (u - i)$. Pour $i = 0, \dots, k$, il existe $a_i \in A$ tel que $x = a_i(u - i)$. Soit P_i le polynôme $P_i(X) = \prod_{j=0, j \neq i}^k \frac{X-j}{i-j}$. On a donc $P_i(j) = \delta_{ij}$ et donc $\sum_{i=0}^k P_i - 1 = 0$ car ce polynôme de degré k a $(k+1)$ racines dans $\mathbb{Q}$. D'autre part, on a $(u - i)P_i(u) = \frac{\prod_{j=0, j \neq i}^k (u-j)}{\prod_{j=0, j \neq i}^k (i-j)} = 0$. On déduit donc :

$$x = \sum_{i=0}^k P_i(u) \cdot x = \sum_{i=0}^k P_i(u)(u - i)a_i = 0$$

d'où $\bigcap_{i=0}^k (u - i) = 0$.

Ceci termine la démonstration de 1.5.4.1.

Montrons 1.5.4.

On peut dans la formule 1.4.2.2 2°) remplacer x par 1. On obtient

p. 23

$$P_\theta^{k+1}(1) = \begin{vmatrix} \theta(1) & \theta(1) & \cdots & \cdots & \theta(1) \\ 1 & \theta(1) & \cdots & \cdots & \theta(1) \\ & 2 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & k & \theta(1) \end{vmatrix} = \prod_{j=0}^k (\theta(1) - j) = 0.$$

D'après le lemme 1.5.4.1, il existe donc une unique décomposition $A = \prod_{i=0}^k A_i$ telle que si θ_i est le composé de θ et de la projection de A sur A_i , on ait $\theta_i(1) = i$. Par ailleurs, puisque la projection de A sur A_i est un morphisme d'anneaux, on a encore $P_{\theta_i}^{k+1} = 0$. De plus, en remarquant que l'on a : $P_{\theta_i}^{j+1}(x_1, \dots, x_j, 1) = (\theta_i(1) - j)P_{\theta_i}^j(x_1, \dots, x_j)$, on déduit par récurrence descendante sur j (j variant de k à $i+1$), que l'on a $P_{\theta_i}^j = 0$, et donc finalement $P_{\theta_i}^{i+1} = 0$. La condition (ii) de 1.5.3 est donc vérifiée pour θ_i et i .

1.6. Revêtement canonique de $\mathrm{TS}_A^k(B)$

1.6.1. DÉFINITION. On note $I_\#(B/A)$ l'idéal de $B \otimes_A \mathrm{TS}_A^k(B)$ engendré par les expressions de la forme

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \left(\prod_{i=1}^k \left(x_i \otimes (1 \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1) - 1 \otimes (1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes \underset{\substack{\sigma(i)\text{ème} \\ \text{place}}}{x_i}} \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1) \right) \right) \\ = Q_{\rho_k}^k(x_1, \dots, x_k).$$

On appelle revêtement canonique de $\mathrm{TS}_A^k(B)$ et on note $B\#\mathrm{TS}_A^k(B)$ le quotient $B \otimes_A \mathrm{TS}_A^k(B)/I_\#(B/A)$.

REMARQUE. Cette notion de revêtement n'est pas compatible aux changements de base.

L'importance de ce revêtement provient de la

1.6.2. PROPOSITION. On a $\rho_k/I_\# = 0$.

ρ_k étant un morphisme de $\mathrm{TS}_A^k(B)$ -modules, il nous suffit de montrer que pour tous $x_1, \dots, x_{k+1}$ dans B , on a : $\rho_k(Q_{\rho_k}^k(x_1, \dots, x_k)x_{k+1}) = 0$.

Montrons d'abord le

1.6.2.1. LEMME. On a :

p. 24

$$Q_{\rho_k}^k(x_1, \dots, x_k) = \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \frac{1}{j!} P_{\rho_k}^j(x_{\sigma_1}, \dots, x_{\sigma_j}) x_{\sigma_{j+1}} \cdots x_{\sigma_k}.$$

On conserve ici les conventions de signe de 1.1. $Q_{\rho_k}^k$ étant une fonction symétrique en $x_1, \dots, x_k$, puisque l'on est en caractéristique zéro, on peut supposer $x_1 = \cdots = x_k = x$. Notant $y_i = 1 \otimes 1 \otimes \cdots \otimes \underset{\substack{i\text{ème} \\ \text{place}}}{x} \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1$, on a alors

$$\frac{1}{k!} Q_{\rho_k}^k(x) = \prod_{i=1}^k (x - y_i) = \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} S^j(y) x^{k-j}$$

où $S^j(y)$ est la $j^{\text{ème}}$ fonction symétrique en les y_i . D'après la proposition 1.5.2, on a $S^j(y) = \frac{1}{j!} P_{\rho_k}^j(x)$, ce qui prouve le lemme.

Ce lemme nous conduit à poser la

1.6.2.2. DÉFINITION. Soient A, B et θ comme dans 1.3.1. On pose

$$Q_\theta^k(x_1, \dots, x_k) = \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^{k-j}}{j!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} P_\theta^j(x_{\sigma_1}, \dots, x_{\sigma_j}) x_{\sigma_{j+1}} \cdots x_{\sigma_k}.$$

1.6.2.3. REMARQUE. Notons que si A et B sont des anneaux commutatifs et si l'on suppose par exemple que B est fini de degré k sur A et est plat sur A , si l'on note R_x le polynôme caractéristique de la multiplication par x dans le A -module B , on a $Q_\theta^k(x) = R_x(x) = 0$ d'après le théorème de Cayley–Hamilton (si θ est la trace canonique de B dans A).

On a le

1.6.2.4. LEMME. On a la relation $P_\theta^{k+1}(x_1, \dots, x_{k+1}) = \theta(Q_\theta^k(x_1, \dots, x_k)x_{k+1})$.

Montrons d'abord par récurrence sur k la relation

$$(1.6.2.5) \quad \begin{aligned} & Q_\theta^k(x_1, \dots, x_k) \\ &= Q_\theta^{k-1}(x_1, \dots, x_{k-1})[\theta(x_k) - x_k] - \sum_{\ell=1}^{k-1} Q_\theta^{k-1}(x_1, \dots, x_\ell x_k, \dots, x_{k-1}). \end{aligned}$$

Le second membre de l'expression ci-dessus est égal à :

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-1)^{k-1-j}}{j!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k-1}} P_\theta^j(x_{\sigma_1}, \dots, x_{\sigma_j}) x_{\sigma_{j+1}} \cdots x_{\sigma_{k-1}} [\theta(x_k) - x_k] \\ & - \sum_{\ell=1}^{k-1} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-1)^{k-1-j}}{j!} \left[\sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_{k-1} \\ \sigma^{-1}(\ell) \leq j}} P_\theta^j(x_{\sigma_1}, \dots, x_\ell x_k, \dots, x_{\sigma_j}) x_{\sigma_{j+1}} \cdots x_{\sigma_{k-1}} \right. \\ & \quad \left. + \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_{k-1} \\ \sigma^{-1}(\ell) > j}} P_\theta^j(x_{\sigma_1}, \dots, x_{\sigma_j}) x_{\sigma_{j+1}} \cdots x_\ell x_k \cdots x_{\sigma_{k-1}} \right] \end{aligned}$$

ce qui, en vertu des relations de récurrence sur les P_θ^j , se récrit

| p. 25

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-1)^{k-j}}{j!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k-1}} P_\theta^j(x_{\sigma_1}, \dots, x_{\sigma_j}) x_{\sigma_{j+1}} \cdots x_{\sigma_{k-1}} x_k \\ & + \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-1)^{k-j}}{j!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k-1}} P_\theta^{j+1}(x_{\sigma_1}, \dots, x_{\sigma_j}, x_k) x_{\sigma_{j+1}} \cdots x_{\sigma_{k-1}} \\ & + \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-1)^{k-j}}{j!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k-1}} P_\theta^j(x_{\sigma_1}, \dots, x_{\sigma_j}) x_{\sigma_{j+1}} \cdots x_{\sigma_{k-1}} x_k \\ & = \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^{k-j}}{j!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} P_\theta^j(x_{\sigma_1}, \dots, x_{\sigma_j}) x_{\sigma_{j+1}} \cdots x_{\sigma_k} = Q_\theta^k(x_1, \dots, x_k) \end{aligned}$$

ce qui prouve (1.6.2.5).

Montrons maintenant par récurrence sur k le [lemme 1.6.2.4](#). La formule est vraie pour $k = 0$. On a :

$$\begin{aligned} P_\theta^{k+1}(x_1, \dots, x_{k+1}) &= P_\theta^k(x_1, \dots, x_k) \theta(x_{k+1}) - \sum_{\ell=1}^k P_\theta^k(x_1, \dots, x_\ell x_{k+1}, \dots, x_k) \\ &= \theta(x_1 Q_\theta^{k-1}(x_2, \dots, x_k)) \theta(x_{k+1}) - \theta(x_1 x_{k+1} Q_\theta^{k-1}(x_2, \dots, x_k)) \\ &\quad - \sum_{\ell=2}^k \theta(x_1 Q_\theta^{k-1}(x_2, \dots, x_\ell x_{k+1}, \dots, x_k)) \\ &= \theta(x_1 Q_\theta^k(x_2, \dots, x_{k+1})) \end{aligned}$$

d'après [\(1.6.2.5\)](#), ce qui prouve [1.6.2.4](#).

Notons enfin que la [proposition 1.6.2](#) résulte immédiatement des [lemmes 1.6.2.1](#) et [1.6.2.4](#) puisque, en vertu du [théorème 1.5.3](#), on a $P_{\rho_k}^{k+1} = 0$.

1.6.3. COROLLAIRE. Soient A, B et θ comme dans [1.3.1](#). On suppose que θ vérifie les conditions équivalentes du [théorème 1.5.3](#). Alors, si J_θ est l'idéal de B engendré par les $Q_\theta^k(x_1, \dots, x_k)$, on a $\theta|_{J_\theta} = 0$. On dira que θ est à support dans B/J_θ .

Cela résulte immédiatement de la propriété [\(i\)](#) du [théorème 1.5.3](#) et de la [proposition 1.6.2](#).

1.6.4. Cas commutatif. Si A et B sont deux $\mathbb{C}$ -algèbres commutatives, si l'on note $Y = \text{Spec } A$, $X = \text{Spec } B$ et $X \# \text{Sym}_Y^k X$ le spectre de $B \otimes \text{TS}_A^k(B)/I_\#$, ensemblistement $X \# \text{Sym}_Y^k X$ a ses points fermés de la forme $(x, (y_1, \dots, y_k))$, où x est l'un des points y_i .

Si Z est un sous-schéma fermé de X , fini et plat sur Y , on dispose d'une trace $\theta : \mathcal{O}_Z \rightarrow A$, et donc d'une trace $\theta : B \rightarrow A$, qui vérifie les conditions de [1.5.3](#) pour un entier k , et qui induit donc un morphisme $f : Y \rightarrow \text{Sym}_Y^k X$. Si l'on note alors $Z_\#$ le produit cartésien $Z_\# \longrightarrow X \# \text{Sym}_Y^k X$, alors $Z_\# = \text{Spec}(B/J_\theta)$ ([1.6.3](#)),

$$\begin{array}{ccc} & & \downarrow \\ & & \downarrow \\ Y & \xrightarrow{f} & \text{Sym}_Y^k X, \end{array}$$

a même support ensembliste que Z , et l'on a un morphisme $Z \rightarrow Z_\#$ qui est ensemblistement l'identité. Toutefois, même si Z est réduit, ce n'est pas en général un isomorphisme.

En général, J_θ n'est pas le plus grand idéal inclus dans $\ker \theta$.

1.7. Sommes de traces et traces de traces

Soient A et B comme dans [1.3.1](#). À deux morphismes d'anneaux $\Psi_1 : \text{TS}_A^{k_1}(B) \rightarrow A$ et $\Psi_2 : \text{TS}_A^{k_2}(B) \rightarrow A$, correspond un morphisme $\Psi_1 \times \Psi_2 : \text{TS}_A^{k_1+k_2}(B) \rightarrow A$ qui est le morphisme composé : $\text{TS}_A^{k_1+k_2}(B) \rightarrow \text{TS}_A^{k_1}(B) \otimes \text{TS}_A^{k_2}(B) \xrightarrow{\Psi_1 \otimes \Psi_2} A$. Si θ_1 et θ_2 sont les traces associées à Ψ_1 et Ψ_2 par le [théorème 1.5.3](#), $\theta_1 + \theta_2$ est la trace associée à $\Psi_1 \times \Psi_2$. Nous exprimons ici la relation entre les $P_{\theta_1+\theta_2}^k$, $P_{\theta_1}^k$ et $P_{\theta_2}^k$ correspondant à cette remarque.

1.7.1. PROPOSITION. Soient A et B comme dans [1.3.1](#) et soient θ_1 et θ_2 deux morphismes de A -modules $B \rightarrow A$. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tous $x_i \in B$, si l'on pose $P_\theta^0 = 1$, on a :

$$P_{\theta_1+\theta_2}^k(x_1, \dots, x_k) = \sum_{\substack{k_1+k_2=k \\ k_i \geq 0}} \frac{1}{k_1!k_2!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} P_{\theta_1}^{k_1}(x_{\sigma_1}, \dots, x_{\sigma_{k_1}}) P_{\theta_2}^{k_2}(x_{\sigma_{k_1+1}}, \dots, x_{\sigma_k}).$$

On procède par récurrence sur k . La formule est triviale pour $k = 1$. Si elle est vraie pour k , on a :

$$\begin{aligned}
P_{\theta_1+\theta_2}^{k+1}(x_1, \dots, x_{k+1}) &= P_{\theta_1+\theta_2}^k(x_1, \dots, x_k)[\theta_1(x_{k+1}) + \theta_2(x_{k+1})] \\
&\quad - \sum_{\ell=1}^k P_{\theta_1+\theta_2}^k(x_1, \dots, x_\ell x_{k+1}, \dots, x_k) \\
&= \left[\sum_{k_1+k_2=k} \frac{1}{k_1!k_2!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} P_{\theta_1}^{k_1}(x_{\sigma_1}, \dots, x_{\sigma_{k_1}}) P_{\theta_2}^{k_2}(x_{\sigma_{k_1+1}}, \dots, x_{\sigma_k}) \right] \\
&\quad [\theta_1(x_{k+1}) + \theta_2(x_{k+1})] - \sum_{k_1+k_2=k} \frac{1}{k_1!k_2!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \\
&\quad \left[\sum_{\ell=1}^{k_1} P_{\theta_1}^{k_1}(x_{\sigma_1}, \dots, x_{\sigma_\ell} x_{k+1}, \dots, x_{\sigma_{k_1}}) P_{\theta_2}^{k_2}(x_{\sigma_{k_1+1}}, \dots, x_{\sigma_k}) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{\ell=k_1+1}^k P_{\theta_1}^{k_1}(x_{\sigma_1}, \dots, x_{\sigma_{k_1}}) P_{\theta_2}^{k_2}(x_{\sigma_{k_1+1}}, \dots, x_{\sigma_\ell} x_{k+1}, \dots, x_{\sigma_k}) \right] \\
&= \sum_{k_1+k_2=k} \frac{1}{k_1!k_2!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \left[P_{\theta_1}^{k_1+1}(x_{\sigma_1}, \dots, x_{\sigma_{k_1}}, x_{k+1}) P_{\theta_2}^{k_2}(x_{\sigma_{k_1+1}}, \dots, x_{\sigma_k}) \right. \\
&\quad \left. + P_{\theta_1}^{k_1}(x_{\sigma_1}, \dots, x_{\sigma_{k_1}}) P_{\theta_2}^{k_2+1}(x_{\sigma_{k_1+1}}, \dots, x_{\sigma_k}, x_{k+1}) \right] \\
&= \sum_{k_1+k_2=k+1} \frac{1}{k_1!k_2!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+1}} P_{\theta_1}^{k_1}(x_{\sigma_1}, \dots, x_{\sigma_{k_1}}) P_{\theta_2}^{k_2}(x_{\sigma_{k_1+1}}, \dots, x_{\sigma_{k_2}})
\end{aligned}$$

ceci termine la démonstration.

1.7.2. COROLLAIRE. Soient A et B comme dans 1.3.1 et soient $\theta_1, \dots, \theta_\ell$ des morphismes de A -modules de B dans A , tels que pour $i = 1, \dots, \ell$, on ait $P_{\theta_i}^{k_i+1} = 0$. Alors, pour tous entiers positifs $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell$, on a $P_{\sum \alpha_i \theta_i}^{\sum \alpha_i k_i + 1} = 0$.

Par récurrence sur $\sum_{i=1}^\ell \alpha_i$, on est ramené au cas $\ell = 2$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$. On a alors $P_{\theta_1}^{k_1+1} = P_{\theta_2}^{k_2+1} = 0$. En remarquant que si $\ell_1 + \ell_2 = k_1 + k_2 + 1$, on a soit $\ell_1 \geq k_1 + 1$, soit $\ell_2 \geq k_2 + 1$, donc soit $P_{\theta_1}^{\ell_1} = 0$, soit $P_{\theta_2}^{\ell_2} = 0$, on déduit de la proposition 1.7.1 que l'on a $P_{\theta_1+\theta_2}^{k_1+k_2+1} = 0$.

Ces deux énoncés peuvent se généraliser comme suit :

1.7.3. PROPOSITION. Soient A une $\mathbb{Q}$ -algèbre commutative, B une A -algèbre commutative et C une B -algèbre commutative. Soient $\theta_1 : B \rightarrow A$ un morphisme de A -modules et $\theta_2 : C \rightarrow B$ un morphisme de B -modules. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$P_{\theta_1 \circ \theta_2}^k(x) = \sum_{s \in \mathcal{S}_k} \frac{k!}{\prod_{i \in \mathbb{N}} (i!)^{s(i)}} \frac{1}{s!} P_{\theta_1}^{|s|} \left(\dots, P_{\theta_2}^i(x)^{\otimes s(i)}, \dots \right)$$

où l'on a posé

$$P_{\theta}^{s_1+\dots+s_r}(x_1^{\otimes s_1}, \dots, x_r^{\otimes s_r}) = P_{\theta}^{s_1+\dots+s_r}(\underbrace{x_1, \dots, x_1}_{s_1}, \dots, \underbrace{x_i, \dots, x_i}_{s_i}, \dots, \underbrace{x_r, \dots, x_r}_{s_r}).$$

On procède par récurrence sur k . La formule est triviale pour $k = 1$. Si elle est vraie pour k , on a :

$$\begin{aligned}
P_{\theta_1 \circ \theta_2}^{k+1}(x) &= \theta_1 \circ \theta_2(x) P_{\theta_1 \circ \theta_2}^k(x) - k P_{\theta_1 \circ \theta_2}^k(x, \dots, x, x^2) \\
&= \sum_{s \in \mathcal{S}_k} \frac{1}{s! \prod_{i=1}^{\infty} (i!)^{s(i)}} \left[\theta_1(\theta_2(x)) P_{\theta_1}^{|s|}(\dots, P_{\theta_2}^i(x)^{\otimes s(i)}, \dots) - k \sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{j}{k} s(j) \right. \\
&\quad \left. P_{\theta_1}^{|s|}(\dots, P_{\theta_2}^i(x)^{\otimes s(i)}, \dots, P_{\theta_2}^j(x)^{\otimes s(j)-1}, P_{\theta_2}^j(x, \dots, x, x^2), \dots) \right] \\
&= \sum_{s \in \mathcal{S}_k} \frac{k!}{s! \prod_{i=1}^{\infty} (i!)^{s(i)}} \left[\theta_1(\theta_2(x)) P_{\theta_1}^{|s|}(\dots, P_{\theta_2}^i(x)^{\otimes s(i)}, \dots) - \sum_{j \in \mathbb{N}} s(j) \right. \\
&\quad \left. P_{\theta_1}^{|s|}(\dots, P_{\theta_2}^j(x)^{\otimes s(j)-1}, P_{\theta_2}^j(x) \theta_2(x), \dots) + \sum_{j \in \mathbb{N}} s(j) \right. \\
&\quad \left. P_{\theta_1}^{|s|}(\dots, P_{\theta_2}^i(x)^{\otimes s(i)}, \dots, P_{\theta_2}^j(x)^{\otimes s(j)-1}, P_{\theta_2}^j(x) \theta_2(x) - P_{\theta_2}^j(x, \dots, x, x^2), \dots) \right] \\
&= \sum_{s \in \mathcal{S}_k} \frac{k!}{s! \prod_{i=1}^{\infty} (i!)^{s(i)}} \left[P_{\theta_1}^{|s|+1}(\theta_2(x), \dots, P_{\theta_2}^i(x)^{\otimes s(i)}, \dots) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{j \in \mathbb{N}} s(j) P_{\theta_1}^{|s|}(\dots, P_{\theta_2}^i(x)^{\otimes s(i)}, \dots, P_{\theta_2}^j(x)^{\otimes s(j)-1}, P_{\theta_2}^{j+1}(x), \dots) \right] \\
&= \sum_{s \in \mathcal{S}_{k+1}} \frac{(k+1)!}{s! \prod_{i=1}^{\infty} (i!)^{s(i)}} P_{\theta_1}^{|s|}(\dots, P_{\theta_2}^i(x)^{\otimes s(i)}, \dots).
\end{aligned}$$

Ceci termine la démonstration de 1.7.3.

1.7.4. COROLLAIRE. Si, sous les hypothèses de 1.7.3, on suppose que l'on a $P_{\theta_1}^{k_1+1} = 0$ et $P_{\theta_2}^{k_2+1} = 0$, alors on a $P_{\theta_1 \circ \theta_2}^{k_1 k_2 + 1} = 0$. | p. 29

En effet soit $s \in \mathcal{S}_{k_1 k_2 + 1}$ tel que $|s| \leq k_1$. Soit m le plus grand entier tel que $s(m) \neq 0$. On a alors

$$k_1 k_2 < k_1 k_2 + 1 = \sum_{i=1}^m i s(i) \leq m \sum_{i=1}^m s(i) = m |s| \leq m k_1$$

d'où $m > k_2$.

Par conséquent, si $s \in \mathcal{S}_{k_1 k_2 + 1}$, soit on a $|s| \geq k_1 + 1$, soit il existe un entier $i \geq k_2 + 1$ tel que $s(i) \neq 0$.

Dans les deux cas, on a $P_{\theta_1}^{|s|}(\dots, P_{\theta_2}^i(x)^{\otimes s(i)}, \dots) = 0$, et on déduit de la **proposition 1.7.3** que l'on a $P_{\theta_1 \circ \theta_2}^{k_1 k_2 + 1} = 0$.

1.8. Sur les équations de $\text{TS}_A^k(B)$

Lorsque B est une A -algèbre engendrée par des éléments $x_1, x_2, \dots, x_s$, en vertu de (1.5.3.1) $\text{TS}_A^k(B)$ est une A -algèbre engendrée par les éléments $\rho_k(x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_r})$, $i_1, \dots, i_r \in \{1, 2, \dots, s\}$. Il est donc naturel de chercher des équations entre les $\rho_k(x_{i_1} \dots x_{i_r})$ (autre celles que l'on peut déduire des équations entre les x_i).

On a la

1.8.1. PROPOSITION. Soient A, B et θ comme dans 1.3.1. On suppose que θ vérifie les propriétés équivalentes du **théorème 1.5.3** ($\theta(1) = k$, $P_{\theta}^{k+1} = 0$). Alors, pour

tous $x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_k$ dans B , on a :

$$\det \begin{pmatrix} k & \theta(x_1) & \theta(x_2) & \cdots & \theta(x_k) \\ \theta(y_1) & \theta(x_1 y_1) & \theta(x_2 y_1) & \cdots & \theta(x_k y_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \theta(y_k) & \theta(x_1 y_k) & \theta(x_2 y_k) & \cdots & \theta(x_k y_k) \end{pmatrix} = 0$$

où le $\det$ est une forme multilinéaire en les x_i et les y_i au sens de 1.1.

1.8.2. LEMME. Soit $P = (P_i)$ une partition de $\{1, \dots, k\}$, et soit $\mathfrak{S}_k^{(P)}$ le sous-groupe de $\mathfrak{S}_k$ formé des substitutions laissant globalement invariants les P_i . Alors, on a :

| p. 30

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k^{(P)}} \varepsilon(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{si } \text{card}(P_i) = 1 \ \forall i \in I \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si tous les P_i n'ont qu'un élément, $\mathfrak{S}_k^{(P)}$ est réduit à l'identité, donc $\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k^{(P)}} \varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\text{id}) = 1$.

Si l'un des P_i a au moins deux éléments, la transposition τ échangeant ces deux éléments appartient à $\mathfrak{S}_k^{(P)}$ et l'application $\sigma \mapsto \tau \circ \sigma$ de $\mathfrak{S}_k^{(P)}$ dans lui-même est une bijection de sorte que l'on a :

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k^{(P)}} \varepsilon(\sigma) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k^{(P)}} \varepsilon(\tau \circ \sigma) = - \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k^{(P)}} \varepsilon(\sigma) = 0.$$

1.8.3. LEMME. Soient A un anneau, B une A -algèbre et θ un morphisme de A -modules de B dans A comme dans 1.3.1. Alors, si $x_1, \dots, x_{k+1}, y_1, \dots, y_{k+1}$ sont des éléments de B , on a

$$\begin{vmatrix} \theta(x_1 y_1) & \theta(x_2 y_1) & \cdots & \theta(x_{k+1} y_1) \\ \theta(x_1 y_2) & & & \vdots \\ \vdots & & \theta(x_j y_i) & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \theta(x_1 y_{k+1}) & \cdots & \cdots & \theta(x_{k+1} y_{k+1}) \end{vmatrix} \\ = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+1}} \varepsilon(\sigma) P_\theta^{k+1}(x_1 y_{\sigma(1)}, \dots, x_i y_{\sigma(i)}, \dots, x_{k+1} y_{\sigma(k+1)}).$$

Exprimons le terme de droite. On a, d'après la 1.4.1,

$$\begin{aligned} & \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+1}} \varepsilon(\sigma) P_\theta^{k+1}(x_1 y_{\sigma(1)}, \dots, x_{k+1} y_{\sigma(k+1)}) \\ &= \sum_{s \in \mathcal{S}_{k+1}} (-1)^{k+1-|s|} \left(\prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{s(j)}} \right) \frac{1}{s!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+1}} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_{k+1}} \varepsilon(\tau) \\ & \quad (\theta(x_{\sigma_1} y_{\tau \circ \sigma_1}) \cdots \theta(x_{\sigma_{s(1)}} y_{\tau \circ \sigma_{s(1)}})) \\ & \quad (\theta(x_{\sigma_{s(1)+1}} x_{\sigma_{s(1)+2}} y_{\tau \circ \sigma_{s(1)+1}} y_{\tau \circ \sigma_{s(1)+2}}) \cdots \\ & \quad \theta(x_{\sigma_{s(1)+2s(2)-1}} x_{\sigma_{s(1)+2s(2)}} y_{\tau \circ \sigma_{s(1)+2s(2)-1}} y_{\tau \circ \sigma_{s(1)+2s(2)}}) \cdots (\cdots) \cdots \\ & \quad \theta(x_{\sigma_{s(1)+2s(2)+\cdots+k s(k)+1}} \cdots x_{k+1} y_{\tau \circ \sigma_{s(1)+\cdots+k s(k)+1}} \cdots y_{\tau \circ \sigma_{k+1}})). \end{aligned}$$

Le coefficient d'un terme $\theta(x_{\sigma_1} y_{\tau \circ \sigma_1}) \cdots \theta(x_{\sigma_{s(1)+\cdots+k s(k)+1}} \cdots y_{\tau \circ \sigma_{k+1}})$ est donc si $(P)_{s, \tau, \sigma}$ est la partition de $\{1, \dots, k+1\}$ en les ensembles $\{\tau \circ \sigma_1\}, \dots, \{\tau \circ$ | p. 31

$\sigma_{s(1)}\}, \{\tau \circ \sigma_{s(1)+1}, \tau \circ \sigma_{s(1)+2}\}, \dots, \{\tau \circ \sigma_{s(1)+2s(2)-1}, \tau \circ \sigma_{s(1)+2s(2)}\}, \dots, \{\tau \circ \sigma_{s(1)+2s(2)+\dots+ks(k)+1}, \dots, \tau \circ \sigma_{k+1}\}$, égal à :

$$(-1)^{k+1-|s|} \left(\prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{s(j)}} \right) \frac{1}{s!} \times \left[s! \prod_{j=1}^{\infty} (j!)^{s(j)} \left(\sum_{t \in \mathfrak{S}_{k+1}^{(P)s, \tau, \sigma}} \varepsilon(t) \right) \right] \varepsilon(\tau)$$

soit encore à :

$$\begin{cases} 0 & \text{si } s(1) < k+1, \\ 1 & \text{si } s(1) = k+1 \quad (\text{et } s(j) = 0 \text{ si } j > 1) \end{cases}$$

d'après le [lemme 1.8.2](#).

On déduit donc

$$\begin{aligned} & \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+1}} \varepsilon(\sigma) P_{\theta}^{k+1}(x_1 y_{\sigma(1)}, \dots, x_{k+1} y_{\sigma(k+1)}) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+1}} \varepsilon(\sigma) \theta(x_1 y_{\sigma(1)}) \cdots \theta(x_{k+1} y_{\sigma(k+1)}), \end{aligned}$$

ce qui prouve le lemme.

1.8.4. Démonstration de la 1.8.1. 1.8.1 résulte immédiatement du 1.8.3 en faisant $x_1 = y_1 = 1$ et en utilisant $\theta(1) = k$ et $P_{\theta}^{k+1} = 0$.

1.8.5. REMARQUES.

1.8.5.1. Soient t_i^j ($i = 1$ à p , $j = 1$ à k) les coordonnées de k copies de $\mathbb{C}^p$. Posons $N_{\ell_1, \dots, \ell_p} = \sum_{j=1}^k \left(\prod_{i=1}^p (t_i^j)^{\ell_i} \right)$. Soit φ_h le morphisme de $\text{Sym}^k(\mathbb{C}^p)$ dans $\mathbb{C}^{(p+h)-1}$ qui, au point de coordonnées (t_i^j) , associe le point de coordonnées $N_{\ell_1, \dots, \ell_p}$, pour $0 < \ell_1 + \ell_2 + \dots + \ell_p \leq h$. On a alors la

PROPOSITION. a) Pour $h \geq k$, φ_h est un plongement de $\text{Sym}^k(\mathbb{C}^p)$ dans $\mathbb{C}^{(p+h)-1}$.

b) Si $p \geq k$, l'idéal de $\text{Sym}^k(\mathbb{C}^p)$ dans $\mathbb{C}^{(p+k)-1}$ est engendré par les expressions déduites de la 1.8.1 de la forme

$$(1.8.5.2) \quad \begin{vmatrix} k & N_{\tilde{\ell}^1} & \cdots & N_{\tilde{\ell}^k} \\ N_{\tilde{\ell}^1} & N_{\tilde{\ell}^1 + \tilde{\ell}^1} & \cdots & N_{\tilde{\ell}^k + \tilde{\ell}^1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ N_{\tilde{\ell}^1} & N_{\tilde{\ell}^1 + \tilde{\ell}^k} & \cdots & N_{\tilde{\ell}^k + \tilde{\ell}^k} \end{vmatrix}$$

pour $\tilde{\ell}^j = (\ell_1^j, \dots, \ell_p^j)$ avec $\sum_{i=1}^p (\ell_i^j + \ell_i^{jh}) \leq k$, $\forall (h, j) \in \{1, \dots, k\}^2$.

c) Si $p < k$, l'idéal de $\text{Sym}^k(\mathbb{C}^p)$ dans $\mathbb{C}^{(p+2k)-1}$ pour le plongement φ_{2k} est engendré par les expressions (1.8.5.2) pour $\sum_{i=1}^p (\ell_i^j + \ell_i^{jh}) \leq 2k$ et par les formes de Waring $P_{\theta}^{k+1}(t^{\tilde{\ell}^1}, \dots, t^{\tilde{\ell}^{k+1}})$ où $\theta(t^{\tilde{\ell}}) = N_{\tilde{\ell}}$, pour $\sum_{j=1}^{k+1} \sum_{i=1}^p \ell_i^j \leq 2k$.

Dans le cas c), la borne $2k$ choisie n'est bien sûr pas la plus petite borne possible en général.

Cette proposition sera démontrée dans un travail ultérieur et ne sera pas utilisée ici (cf. 6.4.2 pour un exemple simple).

1.8.5.3. La proposition 1.8.5.1 traite le cas des polynômes multisymétriques. Pour l'étude des fractions rationnelles multisymétriques, on peut consulter [11], où il est montré notamment que le $n^{\text{ème}}$ produit symétrique d'une variété rationnelle est encore rationnel.

Ce résultat est à rapprocher d'une question de Safarevich demandant si les composantes irréductibles du schéma de Chow d'un espace projectif sont des variétés rationnelles.

Classes de cohomologie locale et résidus

2.1. Résidus et traces de différentielles

2.1.1. Données. On se placera dans la situation suivante : soit S un schéma de caractéristique zéro. Soit X un schéma lisse sur S purement de dimension relative $n + p$ et soit $|Z|$ un fermé de X de dimension relative inférieure ou égale à n . On note j l'immersion fermée : $Z_{\text{red}} \rightarrow X$, où Z_{red} est le schéma réduit sous-jacent au fermé $|Z|$.

On dira qu'un couple (f, B) est une projection de Z , si B est un S -schéma lisse irréductible purement de dimension relative n , f est un S -morphisme $X \rightarrow B$, tel que le morphisme composé $h = f \circ j : Z_{\text{red}} \rightarrow B$ soit un morphisme fini.

2.1.2. Classes de cohomologie locale et traces. Nous considérerons des classes appartenant à $H_{|Z|}^p(X, \Omega_{X/S}^p)$. La théorie de la dualité (cf. [10] pour plus de détails) nous donne la

2.1.3. PROPOSITION. Si pour tout $m \geq 0$, on note Z_m le $m^{\text{ème}}$ voisinage infinitésimal de Z_{red} , j_m le morphisme $Z_m \rightarrow X$, et $h_m = f \circ j_m$, on a :

$$H_{|Z|}^p(X, \Omega_{X/S}^p) \simeq \varinjlim_m \text{Hom} \left(h_{m*} j_m^* \Omega_{X/S}^n, \Omega_{B/S}^n \right).$$

En effet, on a :

$$H_{|Z|}^p(X, \Omega_{X/S}^p) = \varinjlim_m \text{Ext}^p(j_{m*} \mathcal{O}_{Z_m}, \Omega_{X/S}^p),$$

et

$$\begin{aligned} & \text{Ext}^p(j_{m*} \mathcal{O}_{Z_m}, \Omega_{X/S}^p) \\ & \simeq \text{Hom}(j_{m*} \mathcal{O}_{Z_m}, \Omega_{X/S}^p[p]) && \text{(décalage)} \\ & \simeq \text{Hom}(j_{m*} \mathcal{O}_{Z_m}, \Omega_{X/S}^{n+p} \otimes \Omega_{X/S}^n{}^\vee[p]) && \text{(dualité sur } X) \\ & \simeq \text{Hom}(j_{m*} \mathcal{O}_{Z_m} \otimes \Omega_{X/S}^n[-n], \Omega_{X/S}^{n+p}[n+p]) && (\text{Hom}(A, \text{Hom}(B, C)) \simeq \text{Hom}(A \otimes B, C)) \\ & \simeq \text{Hom}(j_{m*} \mathcal{O}_{Z_m} \otimes \Omega_{X/S}^n[-n], K_{X/S}^\bullet) && (X \text{ lisse sur } S). \\ & \simeq \text{Hom} \left(j_m^* (\Omega_{X/S}^n)[n], K_{Z_m/S}^\bullet \right) && \text{(fonctorialité du dual pour une immersion)} \\ & \simeq \text{Hom} \left(j_m^* (\Omega_{X/S}^n)[n], h_m^{-1} \mathbf{R} \text{Hom}(h_{m*} \mathcal{O}_{Z_m}, K_{B/S}^\bullet) \right) && \text{(fonctorialité du dual pour un morphisme fini)} \\ & \simeq \text{Hom} \left(h_{m*} j_m^* (\Omega_{X/S}^n)[n], K_{B/S}^\bullet \right) && \text{(dualité sur } B) \\ & \simeq \text{Hom} \left(h_{m*} j_m^* (\Omega_{X/S}^n)[n], \Omega_{B/S}^n[n] \right) && (B \text{ lisse sur } S) \\ & \simeq \text{Hom} \left(h_{m*} j_m^* (\Omega_{X/S}^n), \Omega_{B/S}^n \right) && \text{(décalage)}. \end{aligned}$$

Dans le reste du **chapitre 2**, on se fixe une classe c dans $H_{|Z|}^p(X, \Omega_{X/S}^p)$.

Rappelons qu'une telle classe est en fait une section globale d'un faisceau $\underline{\text{Ext}}^p(j_{m*}\mathcal{O}_{Z_m}, \Omega_{X/S}^p)$ puisque l'on a :

$$\text{Ext}^p(j_{m*}\mathcal{O}_{Z_m}, \Omega_{X/S}^p) = H^0\left(X, \underline{\text{Ext}}^p(j_{m*}\mathcal{O}_{Z_m}, \Omega_{X/S}^p)\right).$$

(Ceci résulte de ce que la dimension de Z est inférieure ou égale à n).

Par ailleurs, rappelons que l'on a une suite exacte :

$$0 \rightarrow H_{|Z|}^p(\Omega_{X/S}^p \rightarrow \Omega_{X/S}^{p+1} \rightarrow \cdots) \rightarrow H_{|Z|}^p(\Omega_{X/S}^p) \xrightarrow{d'} H_{|Z|}^p(\Omega_{X/S}^{p+1})$$

de sorte que si l'on suppose $d'c = 0$, ce que nous ferons à partir de 2.2, c peut être considéré comme une classe de $H_{|Z|}^p(\Omega_{X/S}^p \rightarrow \Omega_{X/S}^{p+1} \rightarrow \cdots)$.

En particulier, grâce au morphisme de complexes

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \Omega_{X/S}^p \longrightarrow \Omega_{X/S}^{p+1} \longrightarrow \cdots \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{O}_X & \longrightarrow & \Omega_{X/S}^1 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \Omega_{X/S}^p \longrightarrow \Omega_{X/S}^{p+1} \longrightarrow \cdots \end{array}$$

on peut lui associer une classe en cohomologie de de Rham :

$$c \in H_{|Z|}^{2p}(\mathcal{O}_X \rightarrow \Omega_{X/S}^1 \rightarrow \cdots \rightarrow \Omega_{X/S}^p \rightarrow \cdots).$$

Pour un m , il correspond à c , d'après la proposition 2.1.3, un homomorphisme appelé trace et noté $\theta : h_{m*}j_m^*(\Omega_{X/S}^n) \rightarrow \Omega_{B/S}^n$.

Si (B', f') est une autre projection de Z , on a de même une trace $\theta' : h'_{m*}j'^*_m(\Omega_{X/S}^n) \rightarrow \Omega_{B'/S}^n$. L'objet de ce chapitre est de comparer les propriétés des traces θ et θ' .

Soient A un anneau, M un A -module, $f_1, \dots, f_i$ des éléments de A ; l'image d'un élément a de $M/(f_1^r, \dots, f_i^r)$ dans $\varinjlim_n (M/(f_1^n, \dots, f_i^n))$ sera notée par le symbole

$$\left[\begin{array}{c} a \\ f_1^r \cdots f_i^r \end{array} \right] \quad (\text{cf. [7]}).$$

Si Z peut ensemblistement être défini par p équations $f_1, \dots, f_p$ dans X , la classe c peut alors s'écrire :

$$c = \left[\begin{array}{c} \omega_0 \\ f_1^r \cdots f_p^r \end{array} \right] \quad \text{avec } \omega_0 \in \Omega_{X/S}^p.$$

Alors, si $\omega \in \Omega_{X/S}^n$, on a :

$$\theta(\omega) = \text{Res}_{X/B} \left[\begin{array}{c} \omega \wedge \omega_0 \\ f_1^r \cdots f_p^r \end{array} \right] \quad ([10, 3]).$$

2.1.4. Prolongement des traces. La trace $\theta : h_{m*}j_m^*(\Omega_{X/S}^n) \rightarrow \Omega_{B/S}^n$ se prolonge en une trace notée encore $\theta : h_{m*}j_m^*(\Omega_{X/S}^\bullet) \rightarrow \Omega_{B/S}^\bullet$ d'après la

2.1.5. PROPOSITION. Il existe un unique morphisme de $\Omega_{B/S}^\bullet$ -modules gradués, de degré 0, $h_{m*}j_m^*(\Omega_{X/S}^\bullet) \rightarrow \Omega_{B/S}^\bullet$, noté encore θ , et qui induise en degré n le morphisme $\theta : h_{m*}j_m^*(\Omega_{X/S}^n) \rightarrow \Omega_{B/S}^n$ donné.

B étant lisse sur S , par bidualité, on a :

$$\Omega_{B/S}^\bullet \simeq \text{Hom}_{\mathcal{O}_B} \left(\text{Hom}_{\mathcal{O}_B}(\Omega_{B/S}^\bullet, \Omega_{B/S}^n), \Omega_{B/S}^n \right),$$

de sorte que l'homomorphisme :

$$\begin{aligned} \Omega_{B/S}^k &\rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_B}(\Omega_{B/S}^{n-k}, \Omega_{B/S}^n), \\ \omega &\mapsto \varphi_\omega : (\omega' \mapsto \omega \wedge \omega') \end{aligned}$$

définit un isomorphisme $\Omega_{B/S}^\bullet \simeq \text{Hom}_{\mathcal{O}_B}(\Omega_{B/S}^\bullet, \Omega_{B/S}^n)$.

On a dès lors

$$\begin{aligned} & \text{Hom}_{\Omega_{B/S}^\bullet} \left(h_{m*} j_m^* \Omega_{X/S}^\bullet, \Omega_{B/S}^\bullet \right) \\ & \simeq \text{Hom}_{\Omega_{B/S}^\bullet} \left(h_{m*} j_m^* \Omega_{X/S}^\bullet, \text{Hom}_{\mathcal{O}_B}(\Omega_{B/S}^\bullet, \Omega_{B/S}^n) \right) \\ & \simeq \text{Hom}_{\Omega_{B/S}^\bullet} \left(h_{m*} j_m^* \Omega_{X/S}^\bullet \otimes_{\mathcal{O}_B} \Omega_{B/S}^\bullet, \Omega_{B/S}^n \right) \\ & \simeq \text{Hom}_{\mathcal{O}_B} \left(h_{m*} j_m^* \Omega_{X/S}^\bullet, \Omega_{B/S}^n \right). \end{aligned}$$

Si l'on note $\text{Hom}_{\Omega_{B/S}^\bullet}^0(h_{m*} j_m^* \Omega_{X/S}^\bullet, \Omega_{B/S}^\bullet)$ l'ensemble des morphismes de degré 0, on en déduit

$$\text{Hom}_{\Omega_{B/S}^\bullet}^0(h_{m*} j_m^* \Omega_{X/S}^\bullet, \Omega_{B/S}^\bullet) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{O}_B}(h_{m*} j_m^* \Omega_{X/S}^n, \Omega_{B/S}^n)$$

ce qui montre la **proposition 2.1.5**.

Si $\Omega_{B/S}^1$ est un $\mathcal{O}_B$ -module libre, si $(\omega_1, \dots, \omega_n)$ est une base de $\Omega_{B/S}^1$, si I est un sous-ensemble de $\{1, \dots, n\}$, nous noterons

$$\omega_I = \bigwedge_{\substack{i \in I \\ i \text{ croissant}}} \omega_i,$$

${}^c I$ le complémentaire de I dans $\{1, \dots, n\}$, $\varepsilon(I)$ l'entier égal à ± 1 tel que $\omega_{{}^c I} \wedge \omega_I = \varepsilon(I) \omega_{\{1, \dots, n\}}$, et

$$\frac{x \omega_J}{\omega_I} = \begin{cases} 0 & \text{si } I \not\subset J, \\ x \omega_{J \cap {}^c I} & \text{si } I \subset J. \end{cases}$$

Avec ces notations, le prolongement de θ déterminé par 2.1.5, est donné par la formule : si $\omega \in \Omega_{X/S}^k$,

$$\theta(\omega) = \sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, n\} \\ \#I = n-k}} \varepsilon(I) \frac{\theta(\omega \wedge \omega_I)}{\omega_I}.$$

2.1.6. Classes de cohomologie locale d' -fermées. Nous noterons d' la différentielle :

$$d' : H_{|Z|}^p(X, \Omega_{X/S}^\bullet) \rightarrow H_{|Z|}^p(X, \Omega_{X/S}^{\bullet+1}).$$

Rappelons (cf. [8]) que, si l'on écrit les éléments de $H_{|Z|}^p(X, \Omega_{X/S}^p)$ sous forme de symboles 2.1.2, la dérivation d' se fait comme pour les fractions.

2.1.7. PROPOSITION. Soit $c \in H_{|Z|}^p(X, \Omega_{X/S}^p)$, et soit $\theta : h_{m*} j_m^* \Omega_{X/S}^\bullet \rightarrow \Omega_{B/S}^\bullet$, la trace qui lui est associée par les 2.1.3 et 2.1.5. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) $d'c = 0$.
- (ii) $\theta \circ d_{X/S} = d_{B/S} \circ \theta$.

Si $\omega \in \Omega_{X/S}^{n-1}$, on a :

$$\theta \circ d_{X/S}(\omega) - d_{B/S} \circ \theta(\omega) = \text{Res}_B((d\omega) \wedge c) - d_{B/S} \circ \theta(\omega).$$

Or, d'après [8, III 3.1.1 (ii)], on a $d_{B/S} \circ \theta(\omega) = \text{Res}_B(d'(\omega \wedge c))$, puisque la trace des complexes-dualisants commute à la différentielle d' . On en déduit donc :

$$\theta \circ d_{X/S}(\omega) - d_{B/S} \circ \theta(\omega) = \text{Res}_B((d\omega) \wedge c - d'(\omega \wedge c)) = (-1)^{d^\bullet(\omega)} \text{Res}_B(\omega \wedge d'c).$$

La propriété (i) de la 2.1.7 est donc équivalente à $\forall \omega \in \Omega_{X/S}^{n-1}, \theta \circ d_{X/S}(\omega) = d_{B/S} \circ \theta(\omega)$.

Pour en déduire que $\forall \omega \in \Omega_{X/S}^\bullet$, on a alors également $\theta \circ d_{X/S}(\omega) = d_{B/S} \circ \theta(\omega)$, il suffit alors de suivre les isomorphismes de la démonstration de la 2.1.5 :

si θ est la trace $h_{m*} j_m^* \Omega_{X/S}^\bullet \rightarrow \Omega_{B/S}^\bullet$, l'image par ces isomorphismes de $\theta \circ d_{X/S} - d_{B/S} \circ \theta$ est l'élément de $\text{Hom}_{\mathcal{O}_B} \left(h_{m*} j_m^* \Omega_{X/S}^{n-1}, \Omega_{B/S}^n \right)$ égal à $\theta \circ d_{X/S} - d_{B/S} \circ \theta$. $\theta \circ d_{X/S} - d_{B/S} \circ \theta$ est un $\Omega_{B/S}^\bullet$ -homomorphisme car si $\omega' \in \Omega_{B/S}^\bullet$, on a :

$$\begin{aligned} & \theta \circ d_{X/S} - d_{B/S} \circ \theta(\omega \wedge \omega') \\ &= \theta(d\omega) \wedge \omega' + (-1)^{d^\circ(\omega)} \theta(\omega) \wedge d\omega' - d(\theta(\omega) \wedge \omega') \\ &= \theta \circ d_{X/S} - d_{B/S} \circ \theta(\omega) \wedge \omega'. \end{aligned}$$

Nous supposons désormais que la classe fixée en 2.1.2 vérifie les propriétés de la 2.1.7, donc que $d'c = 0$.

2.2. Changement de projection infinitésimal

2.2.1. Automorphisme infinitésimal. Rappelons le résultat suivant :

2.2.2. PROPOSITION. Soient R un anneau de caractéristique zéro, $\mathfrak{N}$ son nilradical, et A une R -algèbre lisse ; soit ψ le morphisme $A \rightarrow A/\mathfrak{N}A$. Alors tout R -automorphisme φ de A tel que $\psi \circ \varphi = \psi$ s'écrit d'une manière unique $\varphi = \exp(U) = \sum_{n \geq 0} \frac{U^n}{n!}$, où U est une R -dérivation de A telle que $\psi \circ U = 0$.

En termes géométriques, l'exponentielle est une bijection du groupe des champs de vecteurs de $\text{Spec } A$ triviaux au-dessus de $(\text{Spec } R)_{\text{red}}$ sur le groupe des automorphismes de $\text{Spec } A$ triviaux au-dessus de $(\text{Spec } R)_{\text{red}}$.

Si U est une R -dérivation de A , et si $\varphi = \exp U$, on a

$$\varphi(xy) = \sum_{n \geq 0} \frac{U^n(xy)}{n!} = \sum_{k, k'} \frac{1}{k! k'!} U^k(x) U^{k'}(y) = \varphi(x) \varphi(y),$$

et

$$\varphi \circ \exp(-U) = \exp(-U) \circ \varphi = \text{id}_A,$$

de sorte que φ est bien un automorphisme de A ; de plus si $\psi \circ U = 0$, on a $\psi \circ \varphi = \psi \circ \exp(0) = \psi$.

Chapitre 3

Invariance des formes multilinéaires de Waring

Chapitre 4

Foncteur de Chow

4.1. Classes de Chow

4.1.1. THÉORÈME.

4.1.2. DÉFINITION.

Chapitre 5

Représentabilité du foncteur de Chow

Chapitre 6

Le cas projectif – le cas réduit

6.1. Comparaison avec l'espace des cycles de Barlet

6.2. Coordonnées de Chow

6.3. Images directes

6.4. Un exemple : les courbes de degré 2 de $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$

6.4.1. PROPOSITION.

6.4.2. LEMME.

Chapitre 7

Le morphisme du schéma de Hilbert dans le schéma de Chow

7.1. Classe fondamentale dans le cas plat

7.2. Cas des diviseurs

7.3. Remarques

Chapitre 8

Intersections

8.1. Cup-produits et intersections

8.2. Équivalence algébrique. Images réciproques

8.3. Intégration de classes de cohomologie

Bibliographie

- [1] B. ANGÉNIOL et F. ELZEIN. « Appendice : La classe fondamentale relative d'un cycle ». In : *Bulletin de la Société Mathématique de France. Supplément. Mémoires* 58 (1978), p. 67-93. Zbl : [0388.14003](#).
- [2] M. ARTIN. *Théoremes de représentabilité pour les espaces algébriques. En collaboration avec Alexandru LASCU et Jean-Francois BOUTOT*. Séminaire de mathématiques supérieures. Été 1970 44. Les Presses de l'Université de Montréal, 1973. Zbl : [0323.14001](#).
- [3] A. BEAUVILLE. « Une notion de résidu en géométrie analytique ». In : *Séminaire Pierre Lelong (Analyse), Année 1970*. Lecture Notes in Mathematics 205. Berlin, Heidelberg, New York : Springer, 1971. Zbl : [0236.32004](#).
- [4] N. BOURBAKI. *Algèbre. Éléments de mathématique VII*. Paris : Hermann, 1948. Zbl : [0039.25902](#).
- [5] N. BOURBAKI. *Algèbre commutative. Éléments de mathématique XXVII*. Actualités scientifiques et industrielles 1290. Paris : Hermann, 1961. Zbl : [0108.04002](#).
- [6] F. ELZEIN. « Résidus en géométrie algébrique ». In : *Compositio mathematica* 23 (1971), p. 379-405. Zbl : [0227.14012](#).
- [7] F. ELZEIN. « Classe fondamentale d'un cycle ». In : *Compositio mathematica* 29 (1974), p. 9-33. Zbl : [0347.14004](#).
- [8] F. ELZEIN. « Complexe dualisant et applications à la classe fondamentale d'un cycle ». In : *Bulletin de la Société Mathématique de France. Supplément. Mémoires* 58 (1978), p. 1-66. Zbl : [0388.14002](#).
- [9] J. FOGARTY. « Algebraic families on an algebraic surface, II, the Picard scheme of the punctual Hilbert scheme ». In : *American Journal of Mathematics* 95.3 (1973), p. 660-687. Zbl : [0299.14020](#).
- [10] R. HARTSHORNE. *Residues and duality. Lecture notes of a seminar on the work of A. Grothendieck, given at Harvard 1963/64*. Lecture Notes in Mathematics 20. Berlin, Heidelberg, New York : Springer, 1966. Zbl : [0212.26101](#).
- [11] A. MATTUCK. « The field of multisymmetric functions ». In : *Proceedings of the American Mathematical Society* 19 (1968), p. 764-765. Zbl : [0159.05303](#).